Finitude pour les representations lisses de groupes p-adiques

Jean-Francois Dat

Finitude pour les représentations lisses de groupes p-adiques

J.-F. Dat

Juillet 2006

Résumé

We study basic properties of the category of smooth representations of a p-adic group G with coefficients in any commutative ring R in which p is invertible. Our main purpose is to prove that Hecke algebras are noetherian whenever R is; a question left open since Bernstein's fundamental work [2] for $R = \mathbb{C}$. In a first step, we prove that this noetherian property would follow from a generalization of the so-called Bernstein's second adjointness property between parabolic functors for complex representations. Then, to attack this second adjointness, we introduce and study "parahoric functors" between representations of groups of integral points of smooth integral models of G and of their "Levi" subgroups. Applying our general study to Bruhat-Tits parahoric models, we get second adjointness for minimal parabolic groups. For non-minimal parabolic subgroups, we have to restrict to classical and linear groups, and use smooth models associated with Bushnell-Kutzko and Stevens semi-simple characters. According to recent announcements by Kim and Yu, the same strategy should also work for "tame groups", using Yu's generic characters.

Table des matières

1 Introduction **1**

2 Décompositions à la Iwahori et induction parahorique **4**

3 Commutation aux foncteurs paraboliques **9**

4 Noethériannité **15**

5 Modèles entiers lisses **20**

6 Paraboliques minimaux, niveau zéro **28**

7 GL(N) **29**

8 Groupes classiques **34**

9 Groupes modérés **38**

A Décomposition "par le niveau" de $Mod_R(G)$ **39**

1 Introduction

1.1 *Le problème* : Soit K un corps local non archimédien d'anneau des entiers $\mathcal{O}$ et de corps résiduel k de caractéristique p, et $\mathcal{G}$ un groupe algébrique réductif connexe défini sur K. On pose[1]

[0] Classification AMS : 20E50

[1] De manière générale, nous noterons les K-schémas par des lettres calligraphiées et leurs K-points par les lettres ordinaires correspondantes.

$G := \mathcal{G}(K)$. Si H est un sous-groupe ouvert compact de G, on peut former l'anneau de Hecke $\mathcal{H}(G,H) := \mathbb{Z}[H\backslash G/H]$ des doubles classes de H dans G. Un célèbre théorème de Bernstein [2] affirme qu'après extension des scalaires de $\mathbb{Z}$ à $\mathbb{C}$, ces anneaux sont noethériens. La preuve de Bernstein est très indirecte car il étudie principalement la catégorie $Mod_{\mathbb{C}}(G)$ des représentations complexes lisses de G. Le principe fondamental qui soutient toute sa théorie est qu'une représentation irréductible supercuspidale complexe est un objet projectif ("modulo le centre") de $Mod_{\mathbb{C}}(G)$. Ainsi, la même preuve fournirait le même résultat après extension des scalaires à n'importe quel corps de caractéristique suffisamment grande (banale dans la terminologie de Vignéras [22]), mais ne fonctionne pas, ne serait-ce que pour un corps de caractéristique non-banale, sans parler du cas d'un anneau. Il est pourtant naturel de s'attendre à ce que ces anneaux de Hecke vérifient une propriété de type "théorème de Hilbert" : R noethérien $\Rightarrow R[H\backslash G/H]$ noethérien. C'est ce que nous étudions – entre autres – dans cet article, avec l'hypothèse supplémentaire que p est inversible dans R, car notre méthode aussi passe par l'étude de la catégorie $Mod_R(G)$ des RG-modules lisses et que pour faire le lien avec les algèbres de Hecke, on a besoin d'une mesure de Haar.

Bien-sûr, l'intérêt de passer par la catégorie $Mod_R(G)$ vient des foncteurs d'induction et restriction paraboliques qui permettent de faire des raisonnements par récurrence sur le rang semi-simple de G. Si $\mathcal{P}$ est un K-sous-groupe parabolique de $\mathcal{G}$ et $\mathcal{M}$ un sous-groupe de Levi de $\mathcal{P}$, la réciprocité de Frobenius nous dit que la "restriction" parabolique $r_{G,P}^M$ est adjointe à gauche de l'induction $i_{M,P}^G$. Dans un article non publié [1] mais bien connu des spécialistes, Bernstein a découvert (avec surprise) que pour les représentations *complexes*, il existe une deuxième propriété d'adjonction, entre le foncteur $i_{M,P}^G$ à gauche et le foncteur $\delta_P r_{G,\overline{P}}^M$ à droite, où $\overline{P}$ est le parabolique opposé à P par rapport à M et δ_P le module de P. Bushnell a publié [10] une preuve différente de cette deuxième adjonction, mais chacune de ces preuves repose de manière cruciale sur la propriété de noethériannité des algèbres de Hecke complexes.

1.2 *Principaux théorèmes* : Dans le présent article nous procédons dans l'autre sens. Dans la section 4 nous prouverons en effet, pour un anneau de coefficients R noethérien et où p est inversible, que *la deuxième adjonction implique la noethériannité* :

Théorème 1.3 *Si pour tout sous-groupe parabolique de tout sous-groupe de Levi de $\mathcal{G}$, les foncteurs paraboliques vérifient la seconde adjonction, alors la catégorie $\mathrm{Mod}_R(G)$ est noethérienne, ainsi que les algèbres de Hecke $\mathcal{H}_R(G,H)$ pour tout pro-p-sous-groupe ouvert H de G.*

La preuve de ce résultat utilise les propriétés des représentations à coefficients dans des corps valués étudiées dans [13].

Dès lors, la majeure partie de cet article vise à établir la propriété de seconde adjonction. Pour cela on utilise un nouvel outil baptisé *induction parahorique*. Identifions l'immeuble étendu $B(\mathcal{M},K)$ de $\mathcal{M}$ à un sous-M-espace de celui de $\mathcal{G}$. Si $x \in B(\mathcal{M},K)$, on définit un certain idempotent $\varepsilon_{x,P}$ normalisé par M_x, dans l'algèbre $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]G_x$ des $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$-distributions sur G_x. Par produit tensoriel avec le (M_x,G_x)-bimodule $\varepsilon_{x,P}\mathcal{C}_R^\infty(G_x)$, on obtient des foncteurs d'induction $I_{x,P}$ et restriction $R_{x,P}$ entre M_x-modules lisses et G_x-modules lisses à coefficients dans R. La motivation initiale pour introduire ces foncteurs vient des relations de commutation remarquables suivantes, dans le cas où P est *minimal* (*cf* 6.2 ii) et 3.5) :

$$ind_{G_x}^G \circ I_{x,P} \simeq i_{M,P}^G \circ ind_{M_x}^M \quad \text{et} \quad Res_M^{M_x} \circ r_{G,P}^M \simeq R_{x,P} \circ Res_G^{G_x}. \tag{1.4}$$

Notons que ceci est nouveau aussi pour $R = \mathbb{C}$. Nous expliquons alors en 3.7 comment la seconde adjonction (pour les paraboliques minimaux) découle de ces formules.

Malheureusement, il semble que ces relations de commutation entre foncteurs paraboliques et parahoriques soient spécifiques aux paraboliques minimaux. En général on introduit la notion d'idempotent P-bon de RM, *cf* 3.6. Il s'agit grosso-modo d'un idempotent ε pour lequel il existe un $x \in B(\mathcal{M},K)$ tel que $\varepsilon \in RM_x$ et

$$\varepsilon.Res_M^{M_x} \circ r_{G,P}^M \simeq \varepsilon.R_{x,P} \circ Res_G^{G_x}.$$

S'il existe "suffisamment" de tels idempotents (*i.e.* s'ils engendrent la catégorie $Mod_R(M)$), alors d'après 3.7, la seconde adjonction est vérifiée pour P.

Reste donc à produire des familles génératrices d'idempotents P-bons. Ceci semble une tâche ardue en général, aussi difficile que la construction de strates/types "raffiné(e)s". Pour un groupe linéaire ou classique, nous montrons dans les sections 7 et 8 que la famille des idempotents associés aux caractères semi-simples de Stevens [20] convient. Nous devons au passage prouver des résultats apparemment nouveaux dans cette théorie (propositions 7.4 et 8.4). On obtient donc sur tout anneau de coefficients R où p est inversible :

Théorème 1.5 *Soit G un groupe linéaire, classique (on suppose alors $p \neq 2$), ou de rang relatif* 1, *alors pour tout parabolique de tout sous-groupe de Levi, les foncteurs paraboliques associés vérifient la seconde adjonction.*

Outre la propriété de noethériannité 1.3, on a aussi les conséquences suivantes :

Corollaire 1.6 *Avec la même hypothèse sur G,*

i) Pour R noethérien, les foncteurs de restriction parabolique de Jacquet préservent la R-admissibilité, cf *3.7 i).*

ii) Support uniforme *: Pour tout pro-p-sous-groupe H de G il existe un sous-ensemble S_H de G, compact modulo le centre et* indépendant de l'anneau R *supportant toutes les fonctions cuspidales dans $\mathcal{C}_R^c(H\backslash G/H)$,* cf *3.8.*

iii) Irréductibilité générique *: Si R est un corps algébriquement clos, alors pour tout sous-groupe parabolique $\mathcal{P} = \mathcal{M}\mathcal{U}$ et toute $\pi \in \mathrm{Irr}_R(M)$, la famille $i_{M,P}^G(\pi\psi)$ pour $\psi : M/M^c \longrightarrow R^\times$ est génériquement irréductible,* cf *4.9.*

Signalons que le dernier point pour R de caractéristique positive n'est nouveau que lorsque K est aussi de caractéristique positive, *cf* [13]. Quant au point ii), il peut être utile à ceux qui s'intéressent aux congruences entre formes automorphes.

L'ingrédient essentiel pour produire des idempotents P-bons est une sorte de généralisation d'un résultat de Howlett-Lehrer [16] où l'on remplace les foncteurs paraboliques des groupes de Lie finis par nos foncteurs parahoriques pour des modèles entiers de $\mathcal{G}$, *cf* partie 5, qui dans les applications seront les modèles de Bruhat-Tits (cas minimal) ou les modèles entiers associés aux types de Bushnell-Kutzko-Stevens (cas général pour les groupes classiques). On peut aussi appliquer cet ingrédient aux modèles entiers de Yu [26] associés à ses types "modérés" [26], voir la partie 9. En utilisant un résultat d'exhaustivité (analogue de 7.5 et 8.5) annoncé récemment par Yu et Kim pour les groupes *modérés* (ceux dont tout tore se déploie sur une extension modérée), on doit pouvoir prouver le théorème 1.5 pour de tels groupes, avec formellement la même preuve que pour les groupes classiques.

Enfin, on obtient aussi quelques résultats partiels sans conditions sur $\mathcal{G}$; outre la seconde adjonction pour les paraboliques minimaux déja mentionnée, on prouve la noethériannité de la sous-catégorie pleine de $Mod_R(G)$ des objets "de niveau zéro", ainsi que la seconde adjonction des foncteurs paraboliques restreints à ces sous-catégories, *cf* 6.3.

1.7 *Organisation de l'article* : L'induction parahorique est définie dans la première section. C'est un cas particulier d'"induction" pour des groupes munis d'une décomposition d'Iwahori "abstraite", et c'est par une discussion de cette situation générale que la section commence ; le résultat fondamental est la proposition 2.2.

La partie 3 étudie les propriétés de commutation entre foncteurs parahoriques et foncteurs paraboliques (notamment 3.5). On y dégage la notion d'idempotent P-bon, et on prouve la seconde adjonction en 3.7, sous réserve qu'il existe "suffisamment" de tels idempotents. Puis la partie 4 prouve que "la seconde adjonction implique la noetheriannité".

Dans la partie 5 on considère des modèles entiers lisses de $\mathcal{G}$ et on étend implicitement la notion d'induction parahorique à ces groupes. On prouve alors un énoncé d'indépendence du sous-groupe parahorique 5.4, analogue à l'énoncé principal de [16] sur l'indépendance du sous-groupe parabolique pour l'induction parabolique des groupes finis.

Dans la partie 6, on spécialise la précédente aux modèles de Bruhat-Tits et on applique les résultats obtenus aux foncteurs paraboliques minimaux et aux représentations de niveau zéro. Dans les parties 7 et 8, on spécialise la partie 5 aux modèles entiers associés aux caractères semi-simples de Stevens, et on prouve le théorème 1.5. Dans la partie 9 on spécialise la partie 5 aux modèles entiers de Yu et à ses caractères génériques ; il ne manque qu'un résultat crucial d'exhaustivité pour en déduire la noetheriannité.

Remerciements : je remercie B. Lemaire pour quelques discussions sur les strates et autres modèles entiers, S. Stevens pour quelques explications sur sa théorie, et G. Henniart pour son intérêt dans ce travail. Je remercie aussi M.-F. Vignéras pour m'avoir transmis ce problème de noetheriannité, qu'elle a abordé dans [23]. Signalons aussi, outre les travaux non-publiés de Bernstein sur ce sujet (à peine évoqués dans [1, 5.4, Rk 1]) une autre approche imaginée par Bezrukavnikov, très naturelle mais qui à ma connaissance n'a pas abouti, consistant à essayer de prouver la noetheriannité du gradué des algèbres de Hecke pour une certaine filtration "géométrique" [3, II-2].

1.8 *Notations* : Pour tout groupe localement compact totalement discontinu H et tout anneau commutatif unitaire R on note :

- $\mathcal{C}_R^{\infty,c}(H)$, le R-module des fonctions localement constantes à valeurs dans R et à support compact.
- RH le R-module des distributions à support compact et à valeurs dans R. Le produit de convolution en fait une R-algèbre unitaire qui se plonge dans le commutant $End_{RH}(\mathcal{C}_R^{\infty,c}(H))$ des translations à droite par H. Lorsque H est compact, ce plongement est un isomorphisme, et si $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de voisinages de l'unité formée de sous-groupes normaux, on a un isomorphisme de R-algèbres $RH \xrightarrow{\sim} \varprojlim R[H/H_n]$.
- $Mod_R(H)$ la catégorie des représentations lisses de H à coefficients dans R. Tout objet de $Mod_R(H)$ est canoniquement muni d'une action de RH, ce qui donne un plongement pleinement fidèle $Mod_R(H) \hookrightarrow Mod(RH)$. S'il existe une mesure de Haar dh sur H à valeurs dans R, alors le sous-R-module $\mathcal{H}_R(H) := \mathcal{C}_R^{\infty,c}(H)dh$ de RH formé des distributions localement constantes est un idéal bilatère de RH engendré par ses idempotents, et l'image essentielle de $Mod_R(H)$ dans $Mod(RH)$ s'identifie à la catégorie des modules "unitaux" sur $\mathcal{H}_R(H)$.

Si K est un sous-groupe compact de H de pro-ordre inversible dans R, la mesure de Haar dk de volume total 1 sur K définit un idempotent de RH que nous noterons e_K. Son action sur un objet (π, V) de $Mod_R(G)$ est donc donnée par $e_K * v = \int_K \pi(k)vdk$.

2 Décompositions à la Iwahori et induction parahorique

Au début de cette section, la lettre G ne désigne pas un groupe réductif p-adique.

Définition 2.1 *Soit G un groupe profini, muni de deux sous-groupes fermés U et $\overline{U}$ normalisés par un troisième sous-groupe fermé M. Nous dirons que le triplet $(U, M, \overline{U})$ induit une* décomposition d'Iwahori *de G si :*

i) L'application produit $U \times M \times \overline{U} \longrightarrow G$ est bijective.

ii) Il existe une base $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de voisinages de G formée de sous-groupes ouverts normaux de la forme $G_i = (U \cap G_i)(M \cap G_i)(\overline{U} \cap G_i)$.

On obtient par exemple de telles décompositions lorsque $\overline{U}$, U, M et G sont les points entiers de groupes algébriques affines lisses $\overline{\mathcal{U}}$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{G}$ définis sur un anneau complet de valuation discrète à corps résiduel fini tels que l'application produit $\overline{\mathcal{U}} \times \mathcal{M} \times \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{G}$ est une immersion ouverte induisant un isomorphisme des fibres spéciales (voir aussi 5.10).

Proposition 2.2 *Soit $G = UM\overline{U}$ un groupe profini muni d'une décomposition d'Iwahori comme ci-dessus. On suppose que M contient un sous-groupe ouvert normal $M^\dagger$ tel que l'ensemble $G^\dagger := UM^\dagger\overline{U}$ soit un pro-p sous-groupe (ouvert) de G. Alors il existe une unique distribution centrale inversible $z_{U,\overline{U}} \in \mathcal{Z}(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]M)^\times$ telle que la distribution $z_{U,\overline{U}}^{-1}e_Ue_{\overline{U}}$ soit un idempotent de l'anneau $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]G$.*

Preuve : Comme première conséquence de la décomposition d'Iwahori, l'application

$$(2.3)\qquad \begin{array}{rcl} \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]M & \to & e_U\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]Ge_{\overline{U}} \\ f & \mapsto & e_U f e_{\overline{U}} \end{array}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]M$-modules. Elle est en effet injective par l'axiome i) de 2.1, et lorsque G est fini elle est surjective, puisqu'alors la multiplication induit un isomorphisme de $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ modules $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}][\overline{U}]\otimes\mathbb{Z}[\frac{1}{p}][M]\otimes\mathbb{Z}[\frac{1}{p}][U] \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[\frac{1}{p}][G]$. Pour G profini, on se ramène au cas fini grâce à l'axiome ii) de 2.1 qui donne une présentation de G sous la forme $G \simeq \varprojlim G/G_i$ où les G/G_i sont des groupes finis munis de décompositions d'Iwahori $G/G_i = U/(U\cap G_i).M/(M\cap G_i).\overline{U}/(\overline{U}\cap G_i)$. L'isomorphisme 2.3 est alors la limite projective des isomorphismes correspondants pour les G/G_i.

Par 2.3, il existe un unique élément $z_{U,\overline{U}} \in \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]M$ tel que

$$e_Ue_{\overline{U}}e_Ue_{\overline{U}} = e_Uz_{U,\overline{U}}e_{\overline{U}} = z_{U,\overline{U}}e_Ue_{\overline{U}}.$$

Par unicité et puisque M normalise U et $\overline{U}$, cet élément est *central* dans $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]M$. Reste à prouver qu'il est inversible. Par application de ce qui précède à $G^\dagger$, on constate que $z_{U,\overline{U}} \in RM^\dagger$, et ceci nous ramène au cas où G est pro-p. Il nous suffit alors de prouver que pour tout i la distribution lisse $z_{U,\overline{U}} * e_{M\cap G_i}$ est un élément inversible dans l'anneau $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}][M/M\cap G_i]$, et ceci nous ramène au cas où G est *fini*.

Supposons dorénavant que G est un p-groupe fini. Pour montrer que $z_{U,\overline{U}}$ est inversible, il suffit de prouver que la multiplication par $z_{U,\overline{U}}$ dans le $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$-module libre de type fini $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}][M]$ a un déterminant inversible, car alors elle sera surjective et son image contiendra l'unité. Il suffit donc de montrer que pour tout corps R de caractéristique différente de p, l'image $z^R_{U,\overline{U}}$ de $z_{U,\overline{U}}$ dans $R[M]$ est inversible.

Pour un tel corps R, les catégories $Mod_R(M)$ et $Mod_R(G)$ sont semi-simples. Notons I_M^G le foncteur

$$I_M^G : \quad \begin{array}{rcl} Mod_R(M) & \to & Mod_R(G) \\ W & \mapsto & R[G]e_Ue_{\overline{U}} \otimes_{R[M]} W \end{array}$$

où l'on considère $R[G]e_Ue_{\overline{U}}$ comme $R[M]$-module à droite et $R[G]$-module à gauche par la formule $(g,m).f := gfm$. L'isomorphisme 2.3 induit l'isomorphisme

$$\begin{array}{rcl} R[M] & \to & e_UR[G]e_Ue_{\overline{U}} \\ f & \mapsto & e_Ufe_Ue_{\overline{U}} \end{array}$$

puisque $e_Uf = e_Ufe_U$. On a donc $e_UI_M^G(W) \simeq_M W$ pour tout $W \in Mod_R(M)$. Par ailleurs, puisque

$$R[G]e_UR[G]e_Ue_{\overline{U}} = R[G]e_Ue_{\overline{U}},$$

le sous R-module $e_UI_M^G(W)$ engendre $I_M^G(W)$ en tant que RG-module. Par semi-simplicité de $Mod_R(G)$, on en déduit que I_M^G envoie irréductibles sur irréductibles.

Maintenant, nous prétendons que l'application

$$\begin{array}{rcl} R[M] & \to & e_{\overline{U}}R[G]e_Ue_{\overline{U}} \\ f & \mapsto & e_{\overline{U}}fe_Ue_{\overline{U}} \end{array}$$

est aussi un isomorphisme. En effet, on en construit un inverse comme ceci : la restriction des fonctions $R[G] \longrightarrow R[M\overline{U}]$ est une application $M\overline{U}$-équivariante à droite et à gauche qui induit une application M-équivariante à droite et à gauche $e_{\overline{U}}R[G]e_{\overline{U}} \longrightarrow e_{\overline{U}}R[M\overline{U}]e_{\overline{U}} \simeq R[M]$. Celle-ci induit l'inverse cherchée.

Il s'ensuit que pour tout $W \in Mod_R(G)$, on a $e_{\overline{U}}I_M^G(W) \simeq_M W$. Supposons de plus W irréductible, alors le R-module $e_{\overline{U}}I_M^G(W)$ étant non-nul, il engendre le RG-module irréductible

$I_M^G(W)$. Ainsi l'inclusion $R[G]e_{\overline{U}}e_Ue_{\overline{U}} \subset R[G]e_Ue_{\overline{U}}$ induit pour tout $W \in Irr_R(M)$ (qui rappelons-le est $R[M]$-projectif) un isomorphisme :

$$R[G]e_{\overline{U}}e_Ue_{\overline{U}} \otimes_{R[M]} W \xrightarrow{\sim} R[G]e_Ue_{\overline{U}} \otimes_{R[M]} W.$$

Par semi-simplicité de $Mod_R(M)$, cet isomorphisme est valable pour tout $W \in Mod_R(M)$ et en particulier pour $R[M]$, ce qui nous fournit l'égalité

$$R[G]e_{\overline{U}}e_Ue_{\overline{U}} = R[G]e_Ue_{\overline{U}}.$$

En particulier, il existe $f \in R[G]$ telle que $fe_{\overline{U}}e_Ue_{\overline{U}} = e_Ue_{\overline{U}}$. On peut choisir f telle que $f = e_Ufe_{\overline{U}}$ et on peut alors écrire $f = e_Uf_M^Re_{\overline{U}} = f_M^Re_Ue_{\overline{U}}$ avec $f_M^R \in R[M]$. On a alors $f_M^Rz_{U,\overline{U}}^Re_Ue_{\overline{U}} = f_M^Re_Ue_{\overline{U}}e_Ue_{\overline{U}} = e_Ue_{\overline{U}}$. Par l'isomorphisme 2.3, ceci montre que f_M^R est un inverse de $z_{U,\overline{U}}^R$ dans $R[M]$.

□

2.4 *Exemple de calcul de l'élément $z_{U,\overline{U}}$ pour $SL(2)$:* Nous incluons ce calcul explicite en réponse à une question de G. Henniart : on suppose que G est le pro-p-radical du sous-groupe d'Iwahori "standard" de $SL(2,\mathbb{Q}_p)$, c'est à dire le groupe formé des matrices à coefficients entiers dont la réduction modulo p est unipotente supérieure. On prend alors pour U les matrices de G qui sont unipotentes supérieures et pour $\overline{U}$ les unipotentes inférieures. Pour M on prend les diagonales. On a donc des isomorphismes

$$m: \begin{array}{ccc} 1+p\mathbb{Z}_p & \to & M \\ z & \mapsto & \begin{pmatrix} z^{-1} & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \end{array}, \quad u: \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_p & \to & U \\ x & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \text{ et } \quad \overline{u}: \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_p & \to & \overline{U} \\ y & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ py & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Un calcul élémentaire montre que l'unique élément de M tel que $\overline{u}(y)u(x) \in Um\overline{U}$ est $m(1+pxy)$. On peut alors exprimer la distribution $z_{U,\overline{U}}$ sous la forme

$$z_{U,\overline{U}} = \int_{\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_p} (1+pxy)dxdy,$$

ce qui signifie que si ϕ est une fonction lisse sur M, alors $< z_{U,\overline{U}}, \phi >= \int_{\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_p} \phi(1+pxy)dxdy$ où dx et dy sont des mesures de Haar normalisées. En particulier si M_n est l'image de $1+p^{n+1}\mathbb{Z}_p$ dans M par l'isomorphisme précédemment décrit, on obtient en notant $1_?$ la fonction caratéristique de ? :

$$z_{U,\overline{U}} * 1_{M_n} = \sum_{z\in\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}} a(z)1_{m(1+pz)M_n}$$

où $a(z) = \frac{1}{p^{2n}}\#\{(x,y) \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}^2,\ \ xy = z\}$.

2.5 *Foncteurs associés :* On considère par la suite un groupe profini G muni d'une décomposition d'Iwahori $G = UM\overline{U}$ *satisfaisant l'hypothèse de la proposition 2.2.* Au (RG, RM)-bimodule lisse $E_{U\overline{U}} := \mathcal{C}_R^\infty(G)e_Ue_{\overline{U}}$ est associé le couple de foncteurs adjoints $(I_{U\overline{U}}, R_{U\overline{U}})$ défini par :

$$I_{U\overline{U}}: \begin{array}{ccc} Mod_R(M) & \to & Mod_R(G) \\ A & \mapsto & E_{U\overline{U}} \otimes_{RM} A \end{array} \quad \text{et} \quad R_{U\overline{U}}: \begin{array}{ccc} Mod_R(G) & \to & Mod_R(M) \\ B & \mapsto & Hom_{RG}(E_{U\overline{U}}, B)^\infty \end{array}$$

et au (RM, RG)-bimodule $E'_{U\overline{U}} := e_Ue_{\overline{U}}\mathcal{C}_R^\infty(G)$ est associé le couple adjoint $(R'_{U\overline{U}}, I'_{U\overline{U}})$ où

$$I'_{U\overline{U}}: \begin{array}{ccc} Mod_R(M) & \to & Mod_R(G) \\ A & \mapsto & Hom_{RM}(E'_{U\overline{U}}, A)^\infty \end{array} \quad \text{et} \quad R'_{U\overline{U}}: \begin{array}{ccc} Mod_R(G) & \to & Mod_R(M) \\ B & \mapsto & E'_{U\overline{U}} \otimes_{RG} B \end{array}.$$

Le signe ∞ désigne la partie lisse du RG ou RM-module concerné.

Corollaire 2.6 *Les foncteurs $R_{U\overline{U}}$ et $R'_{U\overline{U}}$ sont isomorphes au foncteur $B \mapsto e_U e_{\overline{U}} B$, et les foncteurs $I_{U\overline{U}}$ et $I'_{\overline{U}U}$ sont isomorphes.*

Preuve : L'assertion sur R et R' est une conséquence immédiate de la propriété d'idempotence de $z_{U,\overline{U}}^{-1} e_U e_{\overline{U}}$ et de l'inversibilité de $z_{U,\overline{U}}^{-1}$.

Pour l'assertion concernant I et I', on remarque d'abord que pour tout i le diagramme suivant est commutatif ("infl" désigne l'inflation et on pose $U_i := U \cap G_i$, etc...) :

$$\begin{array}{ccc} Mod_R(M/M_i) & \xrightarrow{infl} & Mod_R(M) \\ \downarrow{\scriptstyle I_{U/U_i \overline{U/U_i}}} & & \downarrow{\scriptstyle I_{U\overline{U}}} \\ Mod_R(G/G_i) & \xrightarrow{infl} & Mod_R(G) \end{array}$$

ainsi que son analogue pour I'. Ceci nous ramène au cas où G est *fini*. Dans ce cas l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} R[G] \otimes_R A & \to & Hom_R(R[G], A) \\ \sum_{g\in G} a_g g & \mapsto & \left(g \mapsto a_{g^{-1}}\right) \end{array}$$

est un isomorphisme de (RG, RM)-bimodules qui, puisque $z_{U,\overline{U}}^{-1} e_U e_{\overline{U}}$ est idempotent, induit un isomorphisme de (RG, RM)-bimodules

$$\varphi : \; R[G] e_U e_{\overline{U}} \otimes_R A \xrightarrow{\sim} Hom_R(e_{\overline{U}} e_U R[G], A).$$

Maintenant $I_{U\overline{U}}(A) \simeq (R[G] e_U e_{\overline{U}} \otimes_R A)_M$ et $I'_{\overline{U}U}(A) \simeq Hom_R(e_{\overline{U}} e_U R[G], A)^M$, donc la composée de φ avec la trace sur M induit un morphisme des co-invariants vers les invariants

$$\varphi \circ \mathrm{Tr}_M : \; I_{U\overline{U}}(A) \longrightarrow I'_{\overline{U}U}(A).$$

Puisque $R[G] e_U e_{\overline{U}}$ est projectif sur $R[M]$, le lemme suivant montre que c'est un isomorphisme. $\square$

Lemme 2.7 *Soit M un groupe fini et R un anneau commutatif. Pour toute paire de $R[M]$-modules (B, A), si B est projectif alors l'application trace*

$$Tr_M : \begin{array}{ccc} (B \otimes_R A)_M & \to & (B \otimes_R A)^M \\ b \otimes a & \mapsto & \sum_m mb \otimes ma \end{array}$$

est un isomorphisme de R-modules.

Preuve : On se ramène au cas où B est libre de rang 1 sur $R[M]$ que l'on vérifie "à la main". $\square$

On étudie maintenant la dépendance des foncteurs ci-dessus en la décomposition d'Iwahori de G :

Lemme 2.8 *Soit $G = VM\overline{V}$ une seconde décomposition d'Iwahori de G telle que $G^\dagger = VM^\dagger\overline{V}$, et "compatible" à la décomposition $G = UM\overline{U}$, au sens où $V = (V \cap U)(V \cap \overline{U})$, $U = (U \cap V)(U \cap \overline{V})$ etc... Alors l'application*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_R^\infty(G) e_U e_{\overline{U}} & \to & \mathcal{C}_R^\infty(G) e_V e_{\overline{V}} \\ f & \mapsto & f * e_{\overline{V}} \end{array}$$

est un isomorphisme de (RG, RM)-bimodules.

Preuve : En effet, on a

$$e_U e_{\overline{U}} e_{\overline{V}} = e_U e_V e_{\overline{U}} e_{\overline{V}} = e_U e_V e_{\overline{V}}$$

ce qui montre que l'application est bien définie et qu'elle est surjective puisque les inclusions

$$\mathcal{C}_R^\infty(G) e_V e_{\overline{V}} e_V e_{\overline{V}} \subseteq \mathcal{C}_R^\infty(G) e_U e_V e_{\overline{V}} \subseteq \mathcal{C}_R^\infty(G) e_V e_{\overline{V}}$$

sont des égalités par la proposition précédente. Elle est de plus injective, car l'application $f \mapsto f * z_{U,\overline{U}}^{-1} e_U e_{\overline{U}}$ en est un inverse à droite. $\square$

Comme cas particulier de ce lemme, les bimodules $E_{U\overline{U}}$ et $E_{\overline{U}U}$ sont isomorphes. Posons alors $I_M^G := I_{U\overline{U}}$ et $R_G^M := R_{U\overline{U}}$. Ces foncteurs ne dépendent pas, à isomorphisme près, de l'ordre entre U et $\overline{U}$.

Corollaire 2.9 *Sous les hypothèses de la proposition 2.2 et avec les notations ci-dessus,*

i) Les foncteurs I_M^G et R_G^M sont adjoints des deux côtés.

ii) Le composé $R_G^M \circ I_M^G$ est isomorphe au foncteur identité de $\mathrm{Mod}_R(M)$.

iii) Le foncteur I_M^G envoie objets irréductibles sur objets irréductibles.

Preuve : La première assertion découle du corollaire 2.6 et du lemme précédent. Pour la deuxième assertion, il suffit de vérifier que le morphisme de (RM, RM)-bimodules

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C}_R^\infty(M) & \to & e_U e_{\overline{U}} \mathcal{C}_R^\infty(G) e_U e_{\overline{U}} \\ f & \mapsto & e_U e_{\overline{U}} f e_U e_{\overline{U}} \end{array}$$

est un isomorphisme. Or, la décomposition d'Iwahori montre qu'il est surjectif, et la propriété 2.2 de presqu'idempotence de $e_U e_{\overline{U}}$ montre qu'il est injectif. La troisième assertion a été démontrée au cours de la preuve de la proposition 2.2 dans le cas où G est fini d'ordre une puissance de p. Le cas où G est pro-p s'ensuit, par l'axiome ii) de 2.1. Dans le cas général, il faut commencer par vérifier la propriété de commutation aux foncteurs d'oublis $Res_G^{G^\dagger} \circ I_M^G \simeq I_{M^\dagger}^{G^\dagger} \circ Res_M^{M^\dagger}$, ce que nous laisserons au lecteur. Fixons ensuite $W \in Mod_R(M)$ irréductible. Sa restriction à $M^\dagger$ est semi-simple. Par le point iii) pour $G^\dagger$ et le point ii), on a la propriété suivante : pour tout sous-$RG^\dagger$-module V de $I_M^G(W)$, on a $\mathrm{long}_{RG^\dagger}(V) = \mathrm{long}_{RM^\dagger}(R_G^M(V))$. Ainsi, si V est un sous RG-module non-nul, alors le RM-module $R_G^M(V)$ est non-nul et, par exactitude de R_G^M, est un sous-module de $R_G^M(I_M^G(W)) \simeq W$ donc lui est égal. On en déduit que $\mathrm{long}_{RG^\dagger}(I_M^G(W)) = \mathrm{long}_{RM^\dagger}(V)$ et donc $V = I_M^G W$. $\square$

2.10 *Induction parahorique* : Reprenons les notations de l'introduction. Au K-groupe réductif $\mathcal{G}$, Bruhat et Tits ont associé un immeuble affine "étendu" $B(\mathcal{G}, K)$, muni d'une action "affine" de G. Cet immeuble n'est défini qu'à isomorphisme près ; en fait le groupe des automorphismes affines et G-équivariants de $B(\mathcal{G}, K)$ s'identifie canoniquement au $\mathbb{R}$-espace vectoriel $a_G := Hom_{K-gr}(\mathbb{G}_m, \mathcal{Z}(\mathcal{G})) \otimes \mathbb{R}$.

Si $\mathcal{M}$ est un K-sous-groupe de Levi de $\mathcal{G}$, alors le sous-ensemble $M.A(\mathcal{G}, \mathcal{S}, K)$ des points de $B(\mathcal{G}, K)$ dont la M-orbite rencontre l'appartement $A(\mathcal{G}, \mathcal{S}, K)$ associé à un K-tore déployé maximal $\mathcal{S}$ de $\mathcal{M}$ ne dépend pas du choix de ce K-tore et est un immeuble étendu pour $\mathcal{M}$ relativement à K. Nous le noterons donc $B(\mathcal{M}, K)$; il est muni d'une action de a_M commutant à M que nous noterons $(x, \lambda) \mapsto x + \lambda$ où $\lambda \in a_M$ et $x \in B(\mathcal{M}, K)$.

Si $x \in B(\mathcal{G}, K)$, on note G_x son stabilisateur dans G ; c'est un sous-groupe ouvert compact de G. La théorie de Bruhat et Tits (notre référence sera [21, 3.4]) associe à x un modèle entier lisse $\mathcal{G}_x$ de $\mathcal{G}$ tel que $\mathcal{G}_x(\mathcal{O}) = G_x$. Par lissité, la réduction $\varpi : \; G_x = \mathcal{G}_x(\mathcal{O}) \longrightarrow \mathcal{G}_x(k)$ est surjective. On pose $G_x^+ := \varpi^{-1}({}^u\mathcal{G}_{x,k}(k))$ où ${}^u\mathcal{G}_{x,k}$ désigne le radical unipotent de la fibre spéciale $\mathcal{G}_{x,k}$ de $\mathcal{G}_x$; c'est un pro-p-sous-groupe ouvert et normal de G_x, parfois appelé *pro-p-radical*. Supposons de plus que $x \in B(\mathcal{M}, K)$; le même procédé que ci-dessus fournit un pro-p-radical M_x^+ qui fort heureusement coïncide avec l'intersection $M \cap G_x^+$ (voir aussi 5.1 pour une situation plus générale). De manière générale, pour tout sous-groupe H de G, on notera $H_x := H \cap G_x$ et $H_x^+ := H \cap G_x^+$.

Soit $\mathcal{P} = \mathcal{M}\mathcal{U}$ un K-sous-groupe parabolique et $\overline{\mathcal{P}} = \mathcal{M}\overline{\mathcal{U}}$ son opposé par rapport à $\mathcal{M}$ (*i.e* l'unique sous-groupe parabolique de $\mathcal{G}$ tel que $\mathcal{P} \cap \overline{\mathcal{P}} = \mathcal{M}$). Si $x \in B(\mathcal{M}, K)$, on sait [9, 4.6.8] (voir aussi 5.10) que G_x^+ admet une décomposition d'Iwahori $G_x^+ = U_x^+ M_x^+ \overline{U}_x^+$ au sens de 2.1. Il s'ensuit que le groupe $G_{x,P} := G_x^+ P_x$ admet la décomposition d'Iwahori $U_x M_x \overline{U}_x^+$ et satisfait l'hypothèse de la proposition 2.2 avec M_x^+ pour $M^\dagger$. Celle-ci nous fournit donc un élément

(2.11) $\qquad z_{x,P} \in \mathcal{Z}(RM_x)^\times$ tel que $z_{x,P} e_{U_x} e_{\overline{U}_x^+}$ est un idempotent de $RG_{x,P}$.

On obtient aussi deux foncteurs reliant $Mod_R(M_x)$ et $Mod_R(G_x)$ qui sont adjoints des deux côtés :

(2.12) $$I_{x,P} := ind_{G_{x,P}}^{G_x} \circ I_{M_x}^{G_{x,P}} \text{ et } R_{x,P} := R_{G_{x,P}}^{M_x} \circ Res_{G_x}^{G_{x,P}}$$

avec les notations du corollaire 2.9.

Par un léger abus de langage que nous expliquons ci-dessous, nous dirons que $G_{x,P}$ est un sous-groupe parahorique de G_x. Le foncteur $I_{x,P}$ mérite alors le nom d'*induction parahorique* en ce qu'il relie les représentations de M_x et G_x en passant par le groupe parahorique $G_{x,P}$, comme l'induction parabolique relie les représentations de M à G en passant par P. L'innocent foncteur d'inflation des représentations de M à P est ici remplacé par le foncteur $I_{M_x}^{G_{x,P}}$. Ce dernier n'est pas si facile à définir mais partage certaines des propriétés de l'inflation : il envoie irréductibles sur irréductibles et la composée avec son adjoint est l'identité de $Mod_R(M_x)$, *cf* 2.6.

Dans la terminologie de Bruhat-Tits [9, 5.2.6], un sous-groupe parahorique de G est un sous-groupe de la forme $\varpi^{-1}(\mathcal{P}_k(k))$, où $\mathcal{P}_k$ est un k-sous-groupe parabolique de la fibre spéciale *connexe* $\mathcal{G}_{x,k}^\circ$. En posant $M_x^\circ = \varpi^{-1}(\mathcal{M}_{x,k}^\circ(k))$, on a une application surjective

$$\begin{array}{ccc} \{K-\text{ss-gr paraboliques contenant } \mathcal{M}\} & \longrightarrow & \{k-\text{ss-gr paraboliques contenant } \mathcal{M}_{x,k}^\circ\} \\ & & \| \\ & & \{\text{ss-gr parahoriques de } G_x \text{ contenant } M_x^\circ\} \end{array}$$

qui n'est injective que si x est un sommet hyperspécial. Dans la terminologie usuelle, le sous-groupe parahorique associé à un parabolique $\mathcal{Q} = \mathcal{M}\mathcal{V}$ s'écrit $G_x^+ M_x^\circ V_x$, tandis que dans cet article, nous appelons sous-groupe parahorique les sous-groupes de la forme $G_{x,Q} := G_x^+ M_x V_x$; les deux terminologies peuvent différer mais sont "en bijection". Quoiqu'il en soit, le petit diagramme ci-dessus montre qu'un même parahorique peut être associé à deux paraboliques contenant M différents. Malgré les apparences, nos foncteurs d'induction-restriction ne dépendent, eux, que du parahorique :

Lemme 2.13 *Si $\mathcal{Q} = \mathcal{M}.\mathcal{V}$ et $\mathcal{P} = \mathcal{M}.\mathcal{U}$ sont deux sous-groupes paraboliques tels que $G_{x,P} = G_{x,Q}$, les foncteurs $I_{x,P}$ et $I_{x,Q}$ sont canoniquement isomorphes.*

Preuve : D'après [21, 3.1], les décompositions d'Iwahori $G_{x,P} = U_x M_x \overline{U}_x^+$ et $G_{x,Q} = V_x M_x \overline{V}_x^+$ sont "compatibles" au sens du lemme 2.8. Il suffit donc d'appliquer ce lemme. □

Une fois réglé ce problème, une autre question apparaît naturellement : *les foncteurs parahoriques dépendent-ils du groupe parahorique ?* Dans le cas des groupes réductifs *finis* (sur $\mathbb{F}_p$), Howlett et Lehrer ont montré dans [16] que l'induction parabolique pour les représentations à coefficients dans $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ ne dépend pas du choix du parabolique contenant un Levi donné. En s'inspirant de leur preuve, on est amené à la question suivante :

Question 2.14 *Soit $\mathcal{P} = \mathcal{M}\mathcal{U}$ un K-sous-groupe parabolique de $\mathcal{G}$. A-t-on pour tout $x \in B(\mathcal{M}, K)$*

$$e_{U_x^+} e_{\overline{U}_x} \in (\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]G_x) e_{U_x} e_{\overline{U}_x} \quad et \quad e_{U_x} e_{\overline{U}_x^+} \in e_{U_x} e_{\overline{U}_x} (\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]G_x)?$$

Si cette question avait une réponse affirmative, alors l'application

$$\begin{array}{rcl} e_{U_x} e_{\overline{U}_x^+} \mathcal{C}^\infty(G_x) & \rightarrow & e_{\overline{U}_x} e_{U_x^+} \mathcal{C}^\infty(G_x) \\ f & \mapsto & e_{\overline{U}_x} * f \end{array}$$

serait un isomorphisme de (M_x, G_x)-bimodules et induirait des isomorphismes $I_{x,P} \xrightarrow{\sim} I_{x,\overline{P}}$. Mais l'intérêt principal de la question 2.14 apparaitra dans la prochaine section. Le seul cas où nous pouvons lui donner une réponse positive "sans restrictions" est celui où $\mathcal{P}$ est minimal, *cf 6.2.*

3 Commutation aux foncteurs paraboliques

Soit $\mathcal{P} = \mathcal{M}\mathcal{U}$ un sous-groupe parabolique. Rappelons que le foncteur de Jacquet (ou restriction parabolique) associe à $V \in Mod_R(G)$ le M-module lisse $V_U := V/V(U)$ où $V(U) := \bigcup_{K \subset U} ker\ e_K$

où K décrit l'ensemble des sous-groupe ouverts compacts de U. On notera aussi parfois $r_{G,P}^M$ ce foncteur et $i_{M,P}^G$ son adjoint à droite (induction parabolique), ainsi que $j_U : V \longrightarrow V_U$ la surjection canonique. Nos conventions sur les immeubles sont celles du paragraphe 2.10, et on note toujours $\overline{\mathcal{P}} = \mathcal{M}\overline{\mathcal{U}}$ le parabolique de $\mathcal{G}$ opposé à $\mathcal{P}$ par rapport à $\mathcal{M}$.

Proposition 3.1 *Soit $\mathcal{P} = \mathcal{M}\mathcal{U}$ un sous-groupe parabolique et $y \in B(\mathcal{M}, K)$. Soit ε un idempotent de RM_y et $\widetilde{\varepsilon} := z_{y,P}^{-1} e_{U_y} e_{\overline{U}_y^+} \varepsilon$ l'idempotent de RG_y associé. Supposons que pour tout $x \in y + a_M$, on a*

$$e_{U_x^+} e_{\overline{U}_x} \varepsilon \in (RG_x) e_{U_x} e_{\overline{U}_x} \varepsilon \quad et \quad \varepsilon e_{U_x} e_{\overline{U}_x^+} \in \varepsilon e_{U_x} e_{\overline{U}_x} (RG_x).$$

Alors pour tout objet $V \in Mod_R(G)$, la projection canonique $V \xrightarrow{j_U} V_U$ induit un isomorphisme $\widetilde{\varepsilon} V \xrightarrow{\sim} \varepsilon V_U$ de R-modules.

Rappelons que pour tout $x \in y + a_M$, on a $M_x = M_y$ de sorte que l'idempotent ε, vu dans RG_x, commute aux idempotents e_{U_x}, $e_{\overline{U}_x}$ etc...

Preuve : Le fait que j_U envoie $\widetilde{\varepsilon} V$ dans εV_U est une simple conséquence de sa M_y-équivariance. Fixons un élément z_M du centre de M dont l'action par conjugaison sur $\overline{U}$ (resp. U) soit strictement contractante (resp. dilatante). L'action de z_M sur $B(\mathcal{M}, K)$ est la translation par un vecteur noté $\overline{z}_M \in a_M$. On s'intéresse au comportement de $U_x^{(+)}$ et $\overline{U}_x^{(+)}$ lorsque x décrit la demi-droite d'origine y et de vecteur directeur $\overline{z}_M$. On note pour cela $x(t) := y + t\overline{z}_M$.

Lemme 3.2 *Il existe un ensemble discret $I_y = \{0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \cdots\} \subset \mathbb{R}_+$ tel que si $t \in]t_i, t_{i+1}[$ alors :*
- $U_{x(t)} = U_{x(t)}^+ = U_{x(t_i)} = U_{x(t_{i+1})}^+$
- $\overline{U}_{x(t)} = \overline{U}_{x(t)}^+ = \overline{U}_{x(t_i)}^+ = \overline{U}_{x(t_{i+1})}$

et tel que pour tout i, on a $U_{x(t_i)}^+ \subsetneq U_{x(t_i)}$ et $\overline{U}_{x(t_i)}^+ \subsetneq \overline{U}_{x(t_i)}$.

Preuve : Voir [18, 6.7]. □

En particulier, les applications $t \mapsto U_{x(t)}^{(+)}$ et $t \mapsto \overline{U}_{x(t)}^{(+)}$ sont respectivement croissante et décroissante. Rappelons aussi la propriété suivante :

Fait 3.3 *On a $\bigcup_{t \geqslant 0} U_{x(t)}^{(+)} = U$ et $\bigcap_{t \geqslant 0} \overline{U}_{x(t)}^{(+)} = 1$.*

Soit maintenant $V \in Mod(G)$, on veut montrer d'abord que $\widetilde{\varepsilon} V \cap V(U) = 0$. Soit w un élément de cette intersection, alors par définition de $V(U)$ et par le fait précédent, l'ensemble

$$I_w := \{t \in \mathbb{R}_+, e_{U_{x(t)}} w = 0\}$$

est non vide. Il admet donc une borne inférieure t_w qui, par 3.2 (semi-continuité supérieure) appartient encore à I_w et donc nécessairement à I_y. Toujours par 3.2 (même notation) on a $t_w = 0$ ou $t_w \in I_y \setminus \{0\}$. Le premier cas est trivial : on obtient $e_{U_y} w = w = 0$. Dans le deuxième cas, on considère l'élément $w' = e_{U_{x(t_w)}^+} w$, alors
- $w' \neq 0$ car il existe $\varepsilon > 0$ tel que $U_{x(t_w)}^+ = U_{x(t_w - \varepsilon)}$ d'après 3.2.
- $w' \in e_{U_{x(t_w)}^+} e_{\overline{U}_y^+} \varepsilon V \subset e_{U_{x(t_w)}^+} e_{\overline{U}_{x(t_w)}} \varepsilon V$ car $\overline{U}_{x(t_w)} \subset \overline{U}_y^+$, toujours par 3.2.

On a donc $w' = e_{U_{x(t_w)}^+} e_{\overline{U}_{x(t_w)}} \varepsilon v$ pour un certain $v \in V$ et $e_{U_{x(t_w)}} w' = 0$. Or par hypothèse il existe $\phi \in RG_{x(t_w)}$ tel que $\phi e_{U_{x(t_w)}} w' = w'$ ce qui contredit la non-nullité de w'. On a donc obtenu l'injectivité de la restriction de j_U à $\widetilde{\varepsilon} V$.

Pour la surjectivité, fixons $v \in V$ et remarquons que pour t assez grand, précisément lorsque $e_{\overline{U}_{x(t)}^+} v = v$, l'élément $e_{\overline{U}_{x(t)}^+} v$ de V a la même image que v dans $V/V(U)$. On a donc $V_U = \cup_{t \in \mathbb{R}_+} j_U(e_{\overline{U}_{x(t)}^+} V)$. En conséquence, si on fixe maintenant $w \in \varepsilon V_U$, l'ensemble

$$J_w := \{t \in \mathbb{R}_+, w \in j_U(e_{\overline{U}_{x(t)}^+} \varepsilon V)\}$$

est non vide et admet une borne inférieure t_w qui comme précédemment appartient à J_w et à I_y. Supposons $t_w \neq 0$ et fixons $v \in V$ tel que $j_U(e_{\overline{U}^+_{x(t_w)}}\varepsilon v) = w$. D'après notre hypothèse, il existe $f \in RG_{x(t_w)}$ telle que $e_{U_{x(t_w)}} e_{\overline{U}^+_{x(t_w)}} \varepsilon = e_{U_{x(t_w)}} e_{\overline{U}_{x(t_w)}} \varepsilon f$. Il s'ensuit que

$$w = j_U(e_{U_{x(t_w)}} e_{\overline{U}^+_{x(t_w)}} \varepsilon v) = j_U(e_{U_{x(t_w)}} e_{\overline{U}_{x(t_w)}} \varepsilon f v) = j_U(e_{\overline{U}_{x(t_w)}} \varepsilon f v)$$

ce qui contredit la minimalité de t_w, car $\overline{U}^+_{x(t_w)} \subsetneq \overline{U}_{x(t_w)} = \overline{U}^+_{x(t_w-\varepsilon)}$, pour ε assez petit. On en déduit que $t_w = 0$, donc $\varepsilon V_U = j_U(e_{\overline{U}^+_y}\varepsilon V) = j_U(\widetilde{\varepsilon} V)$.

$\square$

Remarque 3.4 *Comme cas particulier de la proposition précédente, l'application*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C}^{\infty,c}_R(G) & \to & \mathcal{C}^{\infty,c}_R(U\backslash G) \\ f & \mapsto & (g \mapsto \int_U f(ug)du) \end{array}$$

induit un isomorphisme $\widetilde{\varepsilon}\mathcal{C}^{\infty,c}_R(G) \xrightarrow{\sim} \varepsilon\,\mathcal{C}^{\infty,c}_R(U\backslash G)$ *de* RG*-modules.*

En effet, l'application $f \mapsto (g \mapsto \int_U f(ug)du)$ se factorise par j_U et induit un isomorphisme $\mathcal{C}^{\infty,c}_R(G)_U \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^{\infty,c}_R(U\backslash G)$.

Gardons les notations de la proposition précédente et notons $Mod(\varepsilon RM_x\varepsilon)$ la catégorie des modules sur l'anneau $\varepsilon RM_x\varepsilon = \varepsilon RM_y\varepsilon$, où $x \in y + a_M$. On a la paire de foncteurs

$$T_\varepsilon : \begin{array}{rcl} Mod(\varepsilon RM_x\varepsilon) & \to & Mod_R(M_x) \\ B & \mapsto & \mathcal{C}^\infty_R(M_x)\varepsilon \otimes_{\varepsilon RM_x\varepsilon} B \end{array} \quad \text{et} \quad \varepsilon : \begin{array}{rcl} Mod_R(M_x) & \to & Mod(\varepsilon RM_x\varepsilon) \\ V & \mapsto & \varepsilon.V \end{array}.$$

Corollaire 3.5 *Sous les mêmes hypothèses que la proposition 3.1, pour tout* $x \in y + a_M$ *on a*

i) Les foncteurs $\varepsilon.R_{x,P} \circ \mathrm{Res}^{G_x}_G$ *et* $\varepsilon.\mathrm{Res}^{M_x}_M \circ \mathrm{r}^M_{G,P}$ *sont isomorphes.*

ii) Les foncteurs $\mathrm{i}^G_{M,P} \circ \mathrm{ind}^M_{M_x} \circ T_\varepsilon$ *et* $\mathrm{ind}^G_{G_x} \circ I_{x,P} \circ T_\varepsilon$ *sont isomorphes.*

Preuve : Le premier point est une conséquence immédiate de la proposition 3.1 appliquée à x au lieu de y (l'hypothèse de 3.1 est en effet "invariante" par translation sous a_M) et du fait que l'application j_U est M_x-équivariante.

Le deuxième point *ne* se déduit *pas* formellement du premier par adjonction. Soit τ_x un objet de $Mod_R(M_x)$. Rappelons que par définition, on a

$$\mathrm{i}^G_{M,P}(\mathrm{ind}^M_{M_x}(\tau_x)) \simeq (\tau_x \otimes_R \mathcal{C}^{\infty,c}_R(U\backslash G))^{M_x}$$

où M_x agit diagonalement sur le produit tensoriel. Pour prouver le point ii), il nous faut d'abord modifier cette expression en remplaçant "invariants" par "coinvariants". Pour cela rappelons que l'action de la fonction caractéristique 1_{M_x} de M_x induit un morphisme du foncteur des coinvariants vers celui des covariants : pour tout objet W de $Mod_R(M_x)$, on a donc une application "trace" R-linéaire (dépendant du choix d'une mesure de Haar sur M_x) $\mathrm{Tr}_{M_x} : \begin{array}{rcl} W_{M_x} & \to & W^{M_x} \\ w & \mapsto & 1_{M_x}.w \end{array}$.

Nous allons prouver que pour $W = (\tau_x \otimes_R \mathcal{C}^{\infty,c}_R(U\backslash G))$, cette application est bijective, bien que le pro-ordre de M_x ne soit pas inversible dans R. Pour cela, on peut supposer τ_x de type fini et choisir un pro-p-sous-groupe ouvert normal $M_{x,r}$ de M_x dans le noyau de τ_x et dont on note $\overline{M_x} := M_x/M_{x,r}$ le quotient. On a alors une factorisation $\mathrm{Tr}_{M_x} = \mathrm{Tr}_{\overline{M_x}} \circ \mathrm{Tr}_{M_{x,r}}$. Puisque $M_{x,r}$ est pro-p et p est inversible dans R, $\mathrm{Tr}_{M_{x,r}}$ est un isomorphisme, et on a donc

$$\mathrm{Tr}_{M_{x,r}} : (\tau_x \otimes_R \mathcal{C}^{\infty,c}_R(U\backslash G))_{M_{x,r}} \xrightarrow{\sim} (\tau_x \otimes_R \mathcal{C}^{\infty,c}_R(U\backslash G))^{M_{x,r}} \simeq \tau_x \otimes_R \mathcal{C}^{\infty,c}_R(M_{x,r}U\backslash G).$$

On est donc ramené à étudier la trace sous le groupe fini $\overline{M_x}$. D'après le lemme 2.7, il nous suffira de prouver que le $R[\overline{M_x}]$-module $\mathcal{C}^{\infty,c}_R(M_{x,r}U\backslash G)$ est projectif. Celui-ci est somme directe des $R[\overline{M_x}]$-sous-modules

$$\mathcal{C}^{\infty,c}_R(M_{x,r}U\backslash M_xUgH)$$

pour $g \in M_x U\backslash G/H$, et où H désigne ici un sous-groupe ouvert compact fixé. Soit $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante et d'intersection triviale de pro-p-sous-groupes ouverts et normaux dans H assez petits pour que $gH_ig^{-1} \cap (M_x \setminus M_{x,r})U = \emptyset$ pour tout i. Alors, pour tout i, l'action de $\overline{M_x}$ sur l'ensemble $M_{x,r}U\backslash M_xUgH/H_i$ est *libre*, et donc le $R[\overline{M_x}]$-module $B_i := R[M_{x,r}U\backslash M_xUgH/H_i]$ est libre. Comme H_i est pro-p, l'inclusion $B_i \hookrightarrow B_{i+1}$ est scindée sur $R[\overline{M_x}]$ et par récurrence on construit une base de $\varinjlim_i B_i = \mathcal{C}_R^{\infty,c}(M_{x,r}U\backslash M_xUgH)$.

Finalement, on a donc prouvé que

$$i_{M,P}^G(ind_{M_x}^M(\tau_x)) \simeq (\tau_x \otimes_R \mathcal{C}_R^{\infty,c}(U\backslash G))_{M_x} = \tau_x \otimes_{RM_x} \mathcal{C}_R^{\infty,c}(U\backslash G)$$

pour tout objet $\tau_x \in Mod_R(M_x)$. Prenons alors τ_x de la forme $T_\varepsilon(B)$ pour un $\varepsilon RM_x\varepsilon$-module B ; on obtient

$$i_{M,P}^G(ind_{M_x}^M(T_\varepsilon(B))) \simeq B \otimes_{\varepsilon RM_x\varepsilon} \varepsilon\mathcal{C}_R^{\infty,c}(U\backslash G)$$

D'autre part, toujours pour un objet $\tau_x \in Mod_R(M_x)$ général on a par définition

$$ind_{G_x}^G(I_{x,P}(\tau_x)) \simeq \left(\tau_x \otimes_{RM_x} e_{U_x}e_{\overline{U}_x^+}\mathcal{C}_R^{\infty}(G_x)\right) \otimes_{RG_x} \mathcal{C}_R^{\infty,c}(G) \simeq \tau_x \otimes_{RM_x} e_{U_x}e_{\overline{U}_x^+}\mathcal{C}_R^{\infty,c}(G).$$

En appliquant ceci à τ_x de la forme $T_\varepsilon(B)$, on obtient

$$ind_{G_x}^G(I_{x,P}(T_\varepsilon(B))) \simeq B \otimes_{\varepsilon RM_x\varepsilon} \widetilde{\varepsilon}\mathcal{C}_R^{\infty,c}(G).$$

On conclut donc grâce à la $\varepsilon RM_x\varepsilon$-équivariance de l'isomorphisme de la remarque 3.4. □

Pour énoncer le corollaire suivant, donnons quelques définitions :

Définition 3.6 *Soit $\mathcal{P} = \mathcal{M}\mathcal{U}$ un sous-groupe parabolique.*

- *Un idempotent ε de RM sera dit P-bon s'il existe $y_\varepsilon \in B(M,K)$ tel que $\varepsilon \in RM_{y_\varepsilon}$ et les hypothèses de la proposition 3.1 sont vérifiées.*
- *Une famille $\mathcal{E}$ d'idempotents de RM sera dite* génératrice *si $\mathcal{C}_R^{\infty,c}(M) = \sum_{\varepsilon\in\mathcal{E}} \mathcal{C}_R^{\infty,c}(M)\varepsilon$.*

Remarquons simplement qu'un idempotent P-bon est aussi $\overline{P}$-bon et que la famille à un élément $\{1\}$ est génératrice.

Corollaire 3.7 *Soit $\mathcal{P} = \mathcal{M}\mathcal{U}$ un sous-groupe parabolique. Supposons qu'il existe une famille génératrice $\mathcal{E}$ d'idempotents P-bons de RM. Alors*

i) Propriétés de finitude *: l'induction parabolique $i_{M,P}^G$ respecte la propriété d'être* de type fini, *et la restriction parabolique $r_{G,P}^M$ celle d'être* admissible. *De plus, pour tout pro-p-sous-groupe ouvert H de G admettant une $(P,\overline{P})$-décomposition, l'application canonique $V^H \xrightarrow{j_U} r_{G,P}^M(V)^{H\cap M}$ est surjective.*

ii) Seconde adjonction *: le foncteur $\delta_P^{-1}r_{G,P}^M$ est adjoint à droite du foncteur $i_{M,\overline{P}}^G$ d'induction par rapport au parabolique opposé $\overline{P}$ tordu par le module. De plus, pour tout objet V de $Mod_R(G)$, on a $r_{G,P}^M V = 0$ si et seulement si $r_{G,\overline{P}}^M V = 0$.*

Preuve : Remarquons pour commencer, que si une telle famille $\mathcal{E}$ existe, alors on peut en déduire une autre, génératrice aussi, et dont les éléments sont des idempotents *lisses*, *i.e.* dans $\mathcal{C}_R^{\infty,c}(G)$: en effet, si $\varepsilon \in \mathcal{E}$ et $M_{y_\varepsilon,r}$ est un pro-p-sous-groupe ouvert normal de M_{y_ε}, alors ε commute à $e_{M_{y_\varepsilon,r}}$ (qui est central dans RM_{y_ε}) et le produit $\varepsilon e_{M_{y_\varepsilon,r}}$ est donc un idempotent. La famille obtenue en prenant pour chaque ε une base de voisinages de l'unité formée de tels sous-groupes ouverts normaux dans M_{y_ε} est génératrice et satisfait l'hypothèse de l'énoncé. Nous supposerons désormais que les idempotents de $\mathcal{E}$ sont lisses.

Soit $\varepsilon \in \mathcal{E}$ et $\widetilde{\varepsilon}$ l'idempotent de RG_{y_ε} associé. Par construction cet idempotent est lisse dans RG puisque ε l'est dans RM. Il s'ensuit que la représentation $\mathcal{C}_R^{\infty,c}(G)\widetilde{\varepsilon}$ est de type fini. Or, d'après le corollaire 3.5 ii) appliqué au $\varepsilon RM_{y_\varepsilon}\varepsilon$-module libre de rang 1, on a

$$i_{M,P}^G(\mathcal{C}_R^{\infty,c}(M)\varepsilon) \simeq \mathcal{C}_R^{\infty,c}(G)\widetilde{\varepsilon},$$

de sorte que l'induite parabolique de la représentation $\mathcal{C}_R^{\infty,c}(M)\varepsilon$ est de type fini. D'après notre hypothèse, la famille des $\mathcal{C}_R^{\infty,c}(M)\varepsilon$ est génératrice dans la catégorie $Mod_R(M)$. Puisque l'induction parabolique est un foncteur exact, on en déduit qu'elle envoie objets de type fini sur objets de type fini.

Pour montrer l'"'admissibilité" de la restriction parabolique, il suffit bien-sûr de prouver la dernière assertion du point i). Fixons donc $H = (H \cap \overline{U})H_M(H \cap U)$ un pro-p-sous-groupe ouvert de G. Comme H_M est pro-p, il nous suffira de prouver que la restriction de j_U à $V^{H\cap\overline{U}} \longrightarrow V_U$ est *surjective*. Pour cela, il suffit de voir que pour tout $\varepsilon \in \mathcal{E}$, l'image $j_U(V^{H\cap\overline{U}})$ contient εV_U. Choisissons alors y_ε tel que $\overline{U}_{y_\varepsilon}^+ \supset H \cap \overline{U}$. On a

$$j_U(V^{H\cap\overline{U}}) \supset j_U(e_{\overline{U}_{y_\varepsilon}^+}V) \supset j_U(\widetilde{\varepsilon}V) = \varepsilon V_U,$$

d'où la surjectivité recherchée.

Venons-en maintenant à la propriété de seconde adjonction. En déroulant la définition du foncteur d'induction parabolique, on peut en trouver un adjoint à droite. Ceci est dû à Bernstein [1] et nécessite sa notion de "complétion" : pour $V \in Mod_R(G)$ on définit sa complétion $\hat{V}$ par

$$\hat{V} := Hom_G(\mathcal{H}_R(G), V)$$

Le R-module obtenu $\hat{V}$ est canoniquement un RG-module puisque $\mathcal{H}_R(G)$ est un idéal bilatère de RG. L'action de G sous-jacente n'est en général pas lisse, mais en prenant la partie lisse, on retombe sur V, *i.e.* $\hat{V}^\infty = \mathcal{H}_R(G)\hat{V} = V$. En fait, un peu d'*abstract nonsense* montre que le le foncteur "complétion" de $Mod_R(G)$ dans $Mod(RG)$ est un adjoint à droite du foncteur "lissification". En clair, on a la relation d'adjonction $Hom_G(V^\infty, W) \simeq Hom_G(V, \hat{W})$ pour tout RG-module V et tout RG-module lisse W.

Soit maintenant $(\pi, V) \in Mod_R(M)$ et notons encore π l'inflation de π à $\overline{P}$. Par définition on a $i_{M,\overline{P}}^G(V) = \mathcal{C}^\infty(G,V)^{\overline{P}}$ où $\overline{P}$ agit sur une fonction f par $(\overline{p}f)(g) = \pi(\overline{p})(f(g\overline{p}))$. L'application R-linéaire

$$\begin{array}{rccl} \int : & \mathcal{C}^{\infty,c}(G,V) & \rightarrow & \mathcal{C}^\infty(G,V)^{\overline{P}} \\ & f & \mapsto & \left(g \mapsto \int_{\overline{P}} \pi(\overline{p})f(g\overline{p})d\overline{p}\right) \end{array}$$

induit une application G-équivariante $\mathcal{C}^{\infty,c}(G, \delta_{\overline{P}}^{-1}V)_{\overline{P}} \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(G,V)^{\overline{P}}$, où $\delta_{\overline{P}} = \delta_P^{-1}$ désigne le caractère-module de $\overline{P}$. En utilisant la décomposition de Cartan ($G = G_0\overline{P}$ pour G_0 compact spécial), on vérifie que c'est un isomorphisme.

On a donc pour tout $W \in Mod_R(G)$:

$$\begin{array}{rcl} Hom_G(i_{M,\overline{P}}^G(V), W) & \simeq & Hom_G((\mathcal{C}_R^{\infty,c}(G) \otimes_R \delta_P V)_{\overline{P}}, W) \\ & = & Hom_R(\mathcal{C}_R^{\infty,c}(G) \otimes_R \delta_P V, W)^{G\times\overline{P}} \\ & \simeq & Hom_R(\delta_P V, Hom_R(\mathcal{C}_R^{\infty,c}(G), W))^{G\times\overline{P}} \\ & = & Hom_{\overline{P}}(\delta_P V, Hom_G(\mathcal{C}_R^{\infty,c}(G), W)) \\ & = & Hom_{\overline{P}}(\delta_P V, \hat{W}) \\ & = & Hom_M(\delta_P V, \hat{W}^{\overline{U}}) \\ & = & Hom_M(\delta_P V, (\hat{W}^{\overline{U}})^\infty) \end{array}$$

(Prendre garde que dans la dernière ligne, $\hat{W}$ désigne la complétion de W en tant que G-module et $(\hat{W}^{\overline{U}})^\infty$ désigne la partie lisse de $\hat{W}^{\overline{U}}$ en tant que M-module.) Ceci montre que le foncteur $i_{M,\overline{P}}^G$ est adjoint à gauche du foncteur $W \mapsto \delta_P^{-1}(\hat{W}^{\overline{U}})^\infty$. Nous allons maintenant expliciter une flèche M-équivariante $\hat{W}^{\overline{U}} \longrightarrow W_U$ fonctorielle en W. Pour ce faire, prenons un sous-groupe ouvert compact U_c de U, et considérons la composée

$$\overline{j}_U : (\hat{W}^{\overline{U}})^\infty \xrightarrow{e_{U_c}} W \xrightarrow{j_U} W_U.$$

La première flèche est donnée par action de e_{U_c} à gauche ; son image est dans la partie *lisse* W de $\hat{W}$, car pour tout $w \in (\hat{W}^{\overline{U}})^\infty$, on peut trouver $H = (H \cap U)H_M(H \cap \overline{U})$ tel que $(H \cap U) \subset U_c$ et H_M fixe w, qui est aussi fixé par $\overline{U}$ donc par $\overline{U} \cap H$. Par définition de j_U, la composée $\overline{j}_U$ ci-dessus est *indépendante du choix de* U_c, et par suite est M-équivariante et fonctorielle en W.

Puisque la famille $\mathcal{E}$ est supposée génératrice, pour montrer que $\overline{j}_U$ est un isomorphisme, il suffit de vérifier que pour tout $\varepsilon \in \mathcal{E}$, la restriction de $\overline{j}_U$ induit un R-isomorphisme $\varepsilon(\hat{W}^{\overline{U}})^\infty \xrightarrow{\sim} \varepsilon W_U$. Choisissons un point y de $B(M, K)$ tel que $\varepsilon \in RM_y$ et que l'hypothèse de la proposition 3.1 soit vérifiée. On a la factorisation

$$\varepsilon(\hat{W}^{\overline{U}})^\infty \xrightarrow{e_{U_y}} \widetilde{\varepsilon} W \xrightarrow{j_U} \varepsilon W_U$$

et on sait déja par la proposition 3.1 que la flèche de droite est un isomorphisme. Pour étudier la flèche de gauche, remarquons tout d'abord que $\hat{W}^{\overline{U}} \simeq Hom_G(\mathcal{C}_R^{\infty,c}(G)_{\overline{U}}, W)$. On a donc $\varepsilon\hat{W}^{\overline{U}} \simeq Hom_G(\mathcal{C}_R^{\infty,c}(G)_{\overline{U}}\varepsilon, W)$ et par ailleurs, on a aussi $\widetilde{\varepsilon}W \simeq Hom_G(\mathcal{C}_R^{\infty,c}(G)\widetilde{\varepsilon}, W)$. Via ces identifications, on vérifie que la flèche notée e_{U_y} ci-dessus devient la flèche

$$Hom_G(\mathcal{C}_R^{\infty,c}(G)_{\overline{U}}\varepsilon, W) \xrightarrow{j_{\overline{U}}^*} Hom_G(\mathcal{C}_R^{\infty,c}(G)\widetilde{\varepsilon}, W)$$

duale de la flèche $j_{\overline{U}} : \mathcal{C}_R^{\infty,c}(G)\widetilde{\varepsilon} \longrightarrow \mathcal{C}_R^{\infty,c}(G)_{\overline{U}}\varepsilon$. Or celle-ci, par la proposition 3.1 est un isomorphisme ; en effet les groupes U et $\overline{U}$ jouent un rôle parfaitement symétrique dans les hypothèses, et donc dans la conclusion aussi.

$\square$

Avant d'énoncer le prochain résultat, rappelons qu'une fonction $\varphi \in \mathcal{C}_R^\infty(G)$ est dite cuspidale si pour tout sous-groupe parabolique $\mathcal{P} = \mathcal{MU}$ de $\mathcal{G}$, on a $\int_U f(ug)du = 0$ quel que soit $g \in G$.

Proposition 3.8 *Supposons que pour tout sous-groupe parabolique $\mathcal{P} = \mathcal{MU}$ de $\mathcal{G}$, il existe une famille génératrice d'idempotents P-bons de RM. Alors pour tout pro-p-sous-groupe ouvert H de G il existe un sous-ensemble S_H de G, compact modulo le centre et* indépendant de la R-algèbre *$\mathcal{R}$ supportant toutes les fonctions cuspidales dans $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}^c(H\backslash G/H)$.*

Preuve : Fixons pour commencer un sous-groupe parabolique $\mathcal{P} = \mathcal{MU}$. D'après notre hypothèse, il existe un ensemble fini $\mathcal{E}_H$ d'idempotents P-bons de RM et des distributions localement constantes à support compact $f_\varepsilon \in \mathcal{H}_R(M)$ pour $\varepsilon \in \mathcal{E}_H$ telles qu'on ait l'égalité $e_{H\cap M} = \sum_{\varepsilon\in\mathcal{E}_H} \varepsilon f_\varepsilon$ dans $\mathcal{H}_R(M)$. Choisissons un sous-groupe ouvert compact $\overline{U}_H$ de $\overline{U}$ suffisamment petit pour avoir les égalités $e_{\overline{U}_H}\varepsilon f_\varepsilon e_H = \varepsilon f_\varepsilon e_H$ dans $\mathcal{H}_R(G)$ pour tout $\varepsilon \in \mathcal{E}_H$, puis choisissons pour chaque $\varepsilon \in \mathcal{E}_H$ un point $y_\varepsilon \in B(\mathcal{M}, K)$ tel que $\overline{U}_{y_\varepsilon} \subset \overline{U}_H$. Choisissons enfin un sous-groupe ouvert compact U_H suffisamment grand pour contenir chaque U_{y_ε}. On a alors l'égalité dans $\mathcal{H}_R(G)$:

$$e_{U_H}e_H = e_{U_H} \sum_{\varepsilon\in\mathcal{E}_H} \widetilde{\varepsilon}_{y_\varepsilon} f_\varepsilon e_H.$$

Appliquons cette égalité à un élément H-invariant v d'une représentation $V \in Mod_R(G)$ dans le noyau de la projection j_U sur V_U. Chaque $f_\varepsilon v$ est encore dans $ker\, j_U$, donc par définition de "P-bon" et par 3.1, on obtient $e_{U_H}v = 0$.

Soit maintenant $\varphi \in \mathcal{C}_R^c(H\backslash G/H)$ une fonction cuspidale. Pour tout parabolique $\mathcal{P}$, on a donc $e_{U_H} * \varphi = 0$. Il s'ensuit que pour tout élément $g \in G$ tel que $U_H \subset gHg^{-1}$, on a

$$e_H * g^{-1}\varphi(1) = \int_H \varphi(gh)e_H = \varphi(g) = 0.$$

Il nous reste à utiliser le résultat suivant sur la géométrie de G : *l'ensemble des $g \in G$ tels que pour tout P, on a $gHg^{-1} \setminus U_H \neq \emptyset$ est compact modulo le centre de G.*

$\square$

Pour terminer cette section, voici une étape facile pour construire des familles génératrices d'idempotents P-bons. Néanmoins, on ne s'en servira pas dans la suite.

Lemme 3.9 *Supposons que pour tout sous-groupe parabolique $\mathcal{Q} = \mathcal{NV}$ contenant $\mathcal{P}$, il existe une famille $\mathcal{E}_Q$ d'idempotents Q-bons de RN qui engendre la partie cuspidale de $\mathrm{Mod}_R(N)$, dans le sens suivant : pour tout objet V cuspidal de $\mathrm{Mod}_R(N)$, il existe $\varepsilon \in \mathcal{E}$ tel que $\varepsilon V \neq 0$. Alors il existe une famille génératrice $\mathcal{E}$ d'idempotents P-bons de RM.*

Preuve : Pour tout $\mathcal{Q}$ et tout $\varepsilon \in \mathcal{E}_Q$, on choisit un point $y \in B(N, K)$ adapté à ε et tel que $(V \cap M)_y = (V \cap M)_y^+$ et $(\overline{V} \cap M)_y = (\overline{V} \cap M)_y^+$. On pose alors $\varepsilon_M := z_{y,Q\cap M}^{-1} e_{(V\cap M)_y} e_{(\overline{V}\cap M)_y^+} \varepsilon$. C'est un idempotent de RM_y. Si $x \in y + A_M$, on a

$$e_{U_x^+} e_{\overline{U}_x} \varepsilon_M = e_{V_x^+} e_{\overline{V}_x} z^{-1} \varepsilon \in RG_x e_{V_x} e_{\overline{V}_x} \varepsilon = RG_x e_{U_x} e_{\overline{U}_x} \varepsilon_M$$

et de même on vérifie $\varepsilon_M e_{U_x} e_{\overline{U}_x^+} \in \varepsilon_M e_{U_x} e_{\overline{U}_x} RG_x$. L'idempotent ε_M est donc P-bon. Appelons $\mathcal{E}$ l'ensemble des ε_M obtenus en faisant varier $\mathcal{Q}$, $\varepsilon \in \mathcal{E}_Q$ et en saturant par M-conjugaison. Il nous reste à vérifier que cette famille $\mathcal{E}$ est génératrice. Puisqu'on a saturé par conjugaison, il suffit de prouver que la famille des $\mathcal{C}_c^\infty(M)\varepsilon_M$ engendre la catégorie $Mod_R(M)$, et pour cela, il suffit de montrer que pour tout objet W de $Mod_R(M)$, il existe un ε_M tel que $\varepsilon_M W \neq \{0\}$. Soit alors $\mathcal{Q} = \mathcal{VN}$ un parabolique contenant $\mathcal{P}$ et maximal pour la propriété $W_{V\cap M} \neq 0$. Alors la représentation $W_{V\cap M} \in Mod_R(N)$ est cuspidale et par hypothèse il existe $\varepsilon \in \mathcal{E}_Q$ tel que $\varepsilon(W_{V\cap M}) \neq 0$. Or par la proposition 3.1, on a $\varepsilon_M W \xrightarrow{\sim} \varepsilon(W_{V\cap M})$.

□

4 Noethériannité

Dans toute cette section et sauf précision supplémentaire, R désigne toujours une $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$-algèbre noethérienne. Nous allons prouver que *la seconde adjonction implique la noetheriannité*. Commençons par une mise au point :

Lemme 4.1 *Pour un objet V de $\mathrm{Mod}_R(G)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) Pour tout pro-p-sous-groupe ouvert H, le $e_H\mathcal{H}_R(G)e_H$-module V^H est noethérien.

ii) Tout sous-objet W de V engendré par ses invariants sous un sous-groupe ouvert suffisamment petit est de type fini sur G.

Une représentation V satisfaisant ces propriétés sera dite localement noethérienne.

Preuve : *i)* $\Rightarrow$ *ii)* : soit $W \subset V$ et H tel que W^H engendre W. Alors $W^H \subset V^H$ est un sous-$e_H\mathcal{H}_R(G)e_H$-module donc est de type fini. Or, tout sous-ensemble de W^H engendrant W^H sur $e_H\mathcal{H}_R(G)e_H$ engendre W sur G.

ii) $\Rightarrow$ *i)* : fixons $H \subset G$ pro-p et ouvert, et M un sous-$e_H\mathcal{H}_R(G)e_H$-module de V^H. Le G-module $\langle M\rangle_G$ engendré par M satisfait $(\langle M\rangle_G)^H = M$. Soit $v_1, \cdots, v_n$ des générateurs de $\langle M\rangle_G$. On peut les écrire $v_i = \sum g_{ij}m_{ij}$ pour des éléments $g_{ij} \in G$ et $m_{ij} \in M$ adequates. Donc les m_{ij} obtenus (en nombre fini) engendrent M sur $e_H\mathcal{H}_R(G)e_H$.

□

Lemme 4.2 *Si $V \in Mod_R(G)$ est* cuspidale *et de type fini, alors V est localement noethérienne.*

Preuve : (voir aussi [23, A.1.1]). Soit $W \subset V$ un sous-objet et H suffisamment petit pour que W et V soient respectivement engendrés par W^H et V^H. Si $v \in V^H$, alors par définition de la cuspidalité, la fonction $g \mapsto e_Hgv$ est à support compact modulo le centre Z de G, donc le $e_H\mathcal{H}_R(G)e_H$-module engendré par v est de type fini sur l'anneau $R[Z/Z \cap H]$. Ainsi, puisque V^H est de type fini sur $e_H\mathcal{H}_R(G)e_H$, il est aussi de type fini sur $R[Z/Z \cap H]$. Alors par noethériannité de $R[Z/Z \cap H]$, le R-module W^H est de type fini sur $R[Z/Z \cap H]$, donc *a fortiori* de type fini sur $e_H\mathcal{H}_R(G)e_H$. Ainsi W est bien de type fini sur G. □

Dans la suite de cette section, on soumet le groupe réductif $\mathcal{G}$ à l'hypothèse suivante que nous appellerons (Adj) :

Pour tout sous-groupe parabolique $Q = NV$ de tout sous-groupe de Levi M de G, le foncteur $\mathrm{i}_{N,\overline{Q}}^{M}$ est adjoint à gauche du foncteur $\delta_Q^{-1}\mathrm{r}_{M,Q}^{N}$.

D'après le corollaire 3.7, cette hypothèse est vérifiée si pour tout parabolique $\mathcal{P} = \mathcal{MU}$ de $\mathcal{G}$, il existe une famille génératrice d'idempotents P-bons de RM, au sens de 3.6. Nous allons prouver :

Proposition 4.3 *Sous l'hypothèse (Adj), tout $V \in Mod_R(G)$ de type fini est localement noethérien.*

En prenant $V = ind_H^G(1)$, on en déduit :

Corollaire 4.4 *(Toujours sous la même hypothèse) Pour tout pro-p-sous-groupe ouvert, l'algèbre de Hecke $e_H\mathcal{H}_R(G)e_H$ est noethérienne.*

Par ailleurs, on étendra dans l'appendice A, des résultats de Vignéras, Moy et Prasad de décomposition de la catégorie $Mod_R(G)$ par le "niveau". Ces résultats montrent qu'une représentation lisse de type fini V de G est localement noethérienne si et seulement si elle est noethérienne, de sorte que :

Corollaire 4.5 *Sous l'hypothèse (Adj) et sous l'hypothèse de validité des constructions de Moy et Prasad, la catégorie $Mod_R(G)$ est noethérienne,* i.e. *tout sous-objet d'un objet de type fini est de type fini.*

Comme l'énoncé de la proposition 4.3 est clairement vrai pour un groupe de rang semi-simple nul, on fera l'hypothèse de récurrence (HR) qu'il est aussi connu pour tout sous-groupe de Levi strict de G. Pour manier cette hypothèse de récurrence, il sera commode d'utiliser le langage des sous-groupes paraboliques standards. On fixe donc un K-sous-groupe parabolique minimal $\mathcal{P}_0 = \mathcal{M}_0\mathcal{U}_0$ de $\mathcal{G}$; les sous-groupes paraboliques standards sont ceux qui contiennent $\mathcal{P}_0$ et les sous-groupes de Levi standards sont leurs composantes de Levi qui contiennent $\mathcal{M}_0$. Comme les sous-groupes paraboliques standards sont uniquement déterminés par leur composante de Levi standard, on ommettra de préciser le parabolique dans les notations : on notera r_G^M pour $r_{G,P}^M$ et $\overline{r_G^M}$ pour $r_{G,\overline{P}}^M$, etc... On notera de plus $M < G$ pour "M Levi standard de G".

Lemme 4.6 *Les foncteurs paraboliques préservent la type-finitude et le fait d'être engendré par ses invariants sous un sous-groupe ouvert.*

Preuve : Le fait que la restriction parabolique respecte la type-finitude est une conséquence immédiate et classique de la décomposition de Cartan. Pour voir que l'induction i_M^G respecte la type finitude, rappelons qu'un objet $V \in Mod_R(G)$ est de type fini si et seulement si pour tout système inductif filtrant (dénombrable) $(V_i)_{i\in I}$, l'application canonique $\varinjlim Hom_G(V, V_i) \xrightarrow{\gamma_V} Hom_G(V, \varinjlim V_i)$ est surjective. Si $V = i_M^G(W)$ pour W dans $Mod_R(M)$, alors par la seconde adjonction et le fait que $\overline{r_G^M}$ commute aux limites inductives (puisqu'il est adjoint à gauche de $\overline{i_M^G}$), on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} Hom_G(V, \varinjlim V_i) \arrow[r, "\gamma_V"] \arrow[d, equal] & \varinjlim Hom_G(V, V_i) \arrow[d, equal] \\ Hom_M(W, \delta_M(\varinjlim \overline{r_G^M}(V_i))) \arrow[r, "\gamma_W"'] & \varinjlim Hom_M(W, \delta_M \overline{r_G^M}(V_i)) \end{tikzcd} .$$

Si W est de type fini dans $Mod_R(M)$, l'application γ_W est surjective donc γ_V aussi et V est de type fini.

La deuxième propriété annoncée dans l'énoncé est une conséquence de la première : vérifions-le pour i_M^G par exemple : un objet $W \in Mod_R(M)$ est engendré par ses H_M-invariants s'il existe un R-module U et un épimorphisme $ind_{H_M}^M(1) \otimes U \longrightarrow W$. Soit alors H ouvert dans G assez petit pour qu'il existe un épimorphisme $ind_H^G(1)^n \longrightarrow i_M^G(ind_{H_M}^M(1))$. Puisque i_M^G admet un adjoint à droite, il commute aux limites inductives et on obtient un épimorphisme $ind_H^G(1) \otimes U^n \longrightarrow i_M^G(W)$.
□

Notons $\mathcal{L}(G)$ l'ensemble fini des sous-groupes de Levi standards. On le munit d'un ordre total $\leqslant$ raffinant l'ordre partiel défini par l'inclusion. On obtient donc une numérotation $\mathcal{L}(G) = \{M_0, \cdots, M_g = G\}$ telle que $M_i \subset M_j \Rightarrow i < j$.

Lemme 4.7 *Soit $V \in Mod_R(G)$, il existe une filtration*

$$\{0\} = \mathcal{F}_{-1}(V) \subseteq \mathcal{F}_0(V) \subseteq \mathcal{F}_1(V) \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{F}_g(V) = V$$

fonctorielle en V telle que :

i) pour tout $i = 0, \cdots, g$, le gradué $\mathcal{G}_i(V) := \mathcal{F}_i(V)/\mathcal{F}_{i-1}(V)$ est un quotient d'un objet de la forme $i_{M_i}^G(W)$ pour un quotient cuspidal *W de $\delta_{M_i}\overline{r_G^{M_i}}(V)$.*

ii) les $\mathcal{G}_i(V)$ sont de type fini, resp. engendrés par leurs invariants sous un sous-groupe ouvert suffisamment petit, si V l'est.

Preuve : Pour M sous-groupe de Levi standard de G, notons

$$G_M := coker(i_M^G \circ \delta_M \overline{r_G^M} \xrightarrow{adj} 1_{Mod_R(G)})$$

le conoyau dans la catégorie (abélienne) des endofoncteurs de $Mod_R(G)$ de la flèche d'adjonction entre i_M^G et $\delta_M \overline{r_G^M}$ conformément à notre hypothèse (Adj). Remarquons que la flèche $\overline{r_G^M} \circ i_M^G \circ \delta_M \overline{r_G^M} \xrightarrow{\overline{r_G^M}(adj)} \overline{r_G^M}$ est un épimorphisme de foncteurs, puisque par définition de l'adjonction et torsion par δ_M^{-1}, la composée $\overline{r_G^M} \xrightarrow{(adj)'\overline{r_G^M}} \overline{r_G^M} \circ i_M^G \circ \delta_M \overline{r_G^M} \xrightarrow{\overline{r_G^M}(adj)} \overline{r_G^M}$ est l'identité. Ainsi, $\overline{r_G^M} \circ G_M = 0$. Posons alors pour tout $i \geqslant 0$

$$\mathcal{F}_i := ker\left(1_{Mod_R(G)} \longrightarrow G_{M_i} \circ G_{M_{i-1}} \circ \cdots \circ G_{M_0}\right)$$

On obtient une filtration du foncteur identité de $Mod_R(G)$ dont les quotients s'identifient

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1} &\simeq ker(G_{M_{i-1}} \circ \cdots \circ G_{M_0} \longrightarrow G_{M_i} \circ \cdots \circ G_{M_0}) \\ &\simeq im(i_{M_i}^G \circ \delta_{M_i} \overline{r_G^{M_i}} \circ G_{M_{i-1}} \circ \cdots \circ G_{M_0} \xrightarrow{adj} G_{M_{i-1}} \circ \cdots \circ G_{M_0}) \end{aligned}$$

Puisque $G_{M_i} \circ \cdots \circ G_{M_0}$ est un quotient de $G_{M_{i-1}} \circ \cdots \circ G_{M_0}$, on voit par une récurrence immédiate que $\overline{r_G^{M_j}} \circ G_{M_i} \circ \cdots \circ G_{M_0} = 0$ pour tout $j \leqslant i$. En particulier, $\overline{r_G^{M_i}} \circ G_{M_{i-1}} \circ \cdots \circ G_{M_0}(V)$ est un M_i-module cuspidal pour tout $V \in Mod_R(G)$. Pour un tel V, la filtration $\mathcal{F}_*(V)$ remplit le cahier des charges du point i) et le point ii) en découle par le lemme 4.6. $\square$

D'après ce lemme, pour montrer que tout RG-module V de type fini est localement noethérien, il suffit de le faire pour V de la forme $i_M^G(W)$ avec W cuspidal de type fini. De plus, d'après le lemme 4.2 on peut supposer $M \neq G$.

Soit alors $U \subset i_M^G(W)$ un sous RG-module engendré par ses invariants sous un sous-groupe ouvert suffisamment petit ; on veut montrer que U est de type fini. Pour $0 \leqslant i < g$, le gradué $\mathcal{G}_i(U)$ est d'après 4.7 i) un quotient de $i_{M_i}^G \circ \delta_{M_i}\overline{r_G^{M_i}}(U)$. Or, $\overline{r_G^{M_i}}(U)$ est un sous-objet de $\overline{r_G^{M_i}}(i_M^G(W))$, engendré par ses invariants sous un sous-groupe ouvert suffisamment petit. Par l'hypothèse de récurrence (HR) appliquée à $\delta_{M_i}\overline{r_G^{M_i}}(i_M^G(W))$ (qui est de type fini sur N) et le lemme 4.6, $\mathcal{G}_i(U)$ est donc de type fini. Il reste à prouver que le dernier quotient de la filtration $\mathcal{G}_g(U)$ (le quotient cuspidal) est aussi de type fini.

Nous allons utiliser le fait que $i_M^G(W)$ est muni d'une structure supplémentaire : si z est un élément du centre de M, il agit par fonctorialité de façon G-équivariante sur $i_M^G(W)$; on note $i_M^G(z)$ cette action. Fixons alors un réseau cocompact Z_M du centre de M ; on obtient ainsi une structure de $R[Z_M]G$-module lisse sur $V = i_M^G(W)$.

Il n'y a aucune raison pour que U soit stable par cette action de $R[Z_M]$, mais on peut considérer la sous-représentation $\widetilde{U} := R[Z_M].U$ de $i_M^G(W)$ somme des translatés de U sous Z_M. Pour $0 \leqslant i \leqslant g$, la sous-représentation $\mathcal{F}_i(\widetilde{U})$ est stable sous $R[Z_M]$ et contient $\mathcal{F}_i(U)$, par fonctorialité de la filtration 4.7. Par la seconde adjontion et par définition, la représentation $\mathcal{F}_{g-1}(\widetilde{U})$ n'a aucun quotient cuspidal et on a donc $\mathcal{F}_{g-1}(\widetilde{U}) \cap U = \mathcal{F}_{g-1}(U)$; en d'autre termes, $\mathcal{G}_g(U)$ est un sous-objet de $\mathcal{G}_g(\widetilde{U})$. Ainsi d'après 4.2, si on montre que $\mathcal{G}_g(\widetilde{U})$ est de type fini, on pourra en déduire que $\mathcal{G}_g(U)$ est de type fini et on aura terminé la preuve de la proposition 4.3.

D'après la preuve du lemme 4.2, W est une $R[Z_M]M$-représentation admissible. Puisque l'induction i_M^G respecte l'admissibilité, $i_M^G(W)$ est elle-aussi $R[Z_M]$-admissible. Ainsi, pour tout pro-p-sous-groupe ouvert H, les invariants $(\mathcal{G}_g(\widetilde{U}))^H$ forment un $R[Z_M]$-module de type fini. Si l'on montre que la restriction de ce module à $R[Z_G]$, où $Z_G := Z_M \cap \mathcal{Z}(G)$ est de type fini, alors en prenant H suffisamment petit pour que $(\mathcal{G}_g(\widetilde{U}))^H$ engendre $\mathcal{G}_g(\widetilde{U})$, on en déduira la type-finitude de $\mathcal{G}_g(\widetilde{U})$ sur G.

On peut effectuer une réduction supplémentaire en présentant W comme un quotient

$$W_0 \otimes R[M/M^c] = ind_{M^c}^M(R \otimes W_{0|M^c}) \longrightarrow W$$

où $W_0 \in Mod_{\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]}(M)$ est de type fini *et* $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$*-admissible*. Pour cela il suffit de choisir un ensemble fini de RM-générateurs de W, de considérer la $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]M^c$-représentation W_c qu'ils engendrent (et qui est $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$-admissible puisque W est cuspidale et $Z_M \cap M^c = \{1\}$), d'étendre celle-ci trivialement à M^cZ_M puis de poser $W_0 := ind_{M^cZ_M}^M(W_c)$. L'avantage de cette réduction apparaitra dans la preuve du lemme suivant. Remarquons seulement que $i_M^G(W_0 \otimes R[M/M^c])$ est munie d'une action de $R[M/M^c]$ qui prolonge l'action naturelle de $R[Z_M]$. Maintenant, $\mathcal{G}_g(\widetilde{U})$ s'identifie à un sous-quotient $R[Z_M]$-équivariant de $i_M^G(W_0 \otimes R[M/M^c])$, mais le même argument que ci-dessus nous dit qu'il suffit de prouver la type-finitude de son $R[M/M^c]$-saturé.

En d'autres termes, il nous suffit maintenant de prouver :

Lemme 4.8 *Soit M sous-groupe de Levi standard et $W_0 \in Mod_{\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]}(M)$ cuspidale de type fini et admissible. Alors tout $R[M/M^c]G$-sous-quotient cuspidal de $i_M^G(W_0 \otimes R[M/M^c])$ est $R[Z_G]$-admissible.*

Preuve : Commençons par fixer un pro-p-sous-groupe ouvert H de G. Si $\mathfrak{P}$ est un idéal premier de $R[M/M^c]$, nous noterons $K_{\mathfrak{P}}$ le corps résiduel du localisé $R[M/M^c]_{\mathfrak{P}}$.

Première étape : si $\mathfrak{P}$ est dans le support de X^H pour un $R[M/M^c]G$-sous-quotient cuspidal X de $i_M^G(W_0 \otimes R[M/M^c])$, alors l'induite $i_M^G(W_0 \otimes K_{\mathfrak{P}})$ possède un $K_{\mathfrak{P}}G$-sous-quotient cuspidal non-nul.

Comme le foncteur "localisation en $\mathfrak{P}$" est exact, le $R[M/M^c]_{\mathfrak{P}}G$-module $X_{\mathfrak{P}}$ est un sous-quotient cuspidal non-nul de $Y_{\mathfrak{P}} := i_M^G(W_0 \otimes R[M/M^c]_{\mathfrak{P}})$. Soient $U \subset V \subset Y_{\mathfrak{P}}$ tels que $V/U = X_{\mathfrak{P}}$. Par le lemme de Nakayama, on a $U^H \cap \mathfrak{P}V^H \subsetneq V^H$ et par le lemme d'Artin-Rees, il existe un entier k tel que $\mathfrak{P}^k Y_{\mathfrak{P}}^H \cap V^H \subset \mathfrak{P}V^H$. Ainsi le quotient $U/(\mathfrak{P}V + U)$ est un sous-quotient cuspidal non nul de $Y_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{P}^k = i_M^G(W_0 \otimes R[M/M^c]_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{P}^k)$.

Posons $Y_k := Y_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{P}^k$ et fixons $U_k \subset V_k \subset Y_k$ de quotient non-nul et cuspidal. On a une suite exact

$$(V_k \cap \mathfrak{P}Y_k)/(U_k \cap \mathfrak{P}Y_k) \hookrightarrow V_k/U_k \twoheadrightarrow (V_k + \mathfrak{P}Y_k)/(U_k + \mathfrak{P}Y_k)$$

dans laquelle le terme de gauche est un sous-quotient de $\mathfrak{P}Y_k$ et celui de droite est un sous-quotient de $Y_1 = Y_k/\mathfrak{P}$. Choisissons un système de r générateurs ($r \in \mathbb{N}$) de l'idéal $\mathfrak{P}$; il lui est associé un épimorphisme $Y_{k-1}^r \longrightarrow \mathfrak{P}Y_k$ pour chaque $k > 1$. On voit donc par récurrence descendante que Y_1 admet un sous-quotient cuspidal non-nul.

Deuxième étape : si l'induite $i_M^G(W_0 \otimes K_{\mathfrak{P}})$ possède un $K_{\mathfrak{P}}G$-sous-quotient cuspidal non-nul, alors $K_{\mathfrak{P}}$ est de caractéristique positive $l \neq p$, et il existe une représentation irréductible $\sigma \in Mod_{\mathbb{F}_l}(M)$ telle que l'induite $i_M^G(\sigma \otimes_{\mathbb{F}_l} K_{\mathfrak{P}})$ possède un $K_{\mathfrak{P}}G$-sous-quotient cuspidal non-nul.

D'après la théorie classique de Bernstein, on sait que sur un corps de caractéristique nulle, une induite parabolique n'a pas de sous-quotient cuspidal, d'où l'assertion sur la caractéristique. Le reste est évident puisque une représentation cuspidale admissible de type fini sur un corps est de longueur finie.

Troisième étape : si $i_M^G(\sigma\otimes_{\mathbb{F}_l} K_{\mathfrak{P}})$ possède un $K_{\mathfrak{P}}G$-sous-quotient cuspidal non-nul, alors pour tout parabolique Q contenant M, l'induite $i_{M,Q}^G(\sigma\otimes_{\mathbb{F}_l} K_{\mathfrak{P}})$ possède un $K_{\mathfrak{P}}G$-sous-quotient cuspidal non-nul.

Notons $\widetilde{R} := R/(\mathcal{P}\cap R)$; c'est une $\mathbb{F}_l$-algèbre intègre et on note $\widetilde{K}$ son corps des fractions. Par hypothèse, l'induite $i_M^G(\sigma\otimes\widetilde{R}[M/M^c])$ a un sous-quotient cuspidal dont le support contient $\mathfrak{P}$. Par l'argument de [13, 7.3], la représentation $\sigma\otimes\widetilde{K}(M/M^c)$ est (P,Q)-régulière au sens de [13, 2.10], et il existe donc un opérateur d'entrelacement *non-nul* :

$$J_{Q|P}(\sigma\otimes\widetilde{K}(M/M^c)) : i_M^G(\sigma\otimes\widetilde{K}(M/M^c)) \longrightarrow i_{M,Q}^G(\sigma\otimes\widetilde{K}(M/M^c)).$$

Cet opérateur est *injectif*, par le théorème d'irréductibilité générique [13, 5.1] que l'on peut appliquer grâce au lemme 4.9 ci-dessous. En effet, soit $\overline{K}$ une clôture algébrique de $\widetilde{K}$. Choisissons une décomposition de la représentation $\sigma\otimes\overline{\mathbb{F}}_l$ en une somme directe de représentations $\overline{\sigma}_i\in Mod_{\overline{\mathbb{F}}_l}(M)$ irréductibles. Chaque $\overline{\sigma}_i\otimes_{\overline{\mathbb{F}}_l}\overline{K}(M/M^c)$ est (P,Q)-régulière et lui est donc associé un opérateur d'entrelacement. Par définition, l'opérateur $J_{Q|P}(\sigma\otimes\widetilde{K}(M/M^c))$ induit par extension des scalaires de $\widetilde{K}$ à $\overline{K}$ la somme directe des opérateurs $J_{Q|P}(\overline{\sigma}_i\otimes\overline{K}(M/M^c))$. Maintenant par [13, 5.1] chaque $i_M^G(\overline{\sigma}_i\otimes\overline{K}(M/M^c))$ est irréductible, d'où l'injectivité cherchée (l'opérateur $J_{Q|P}$ étant non-nul).

Puisque la représentation $i_M^G(\sigma\otimes\widetilde{R}[M/M^c])$ est de type fini, il existe un élément $f\in\widetilde{R}[M/M^c]$ tel que l'opérateur $f.J_{Q|P}$ induise le $\widetilde{R}[M/M^c]G$-morphisme *injectif* :

$$f.J_{Q|P}(\sigma\otimes\widetilde{K}(M/M^c)) : i_M^G(\sigma\otimes\widetilde{R}[M/M^c]) \longrightarrow i_{M,Q}^G(\sigma\otimes\widetilde{R}[M/M^c]).$$

On en déduit l'existence d'un sous-quotient cuspidal de support contenant $\mathfrak{P}$ dans l'induite $i_{M,Q}^G(\sigma\otimes\widetilde{R}[M/M^c])$ et par la première étape, l'existence d'un sous-quotient cuspidal non-nul dans l'induite $i_{M,Q}^G(\sigma\otimes K_{\mathfrak{P}})$.

Quatrième étape : si $R[M/M^c]/\mathfrak{P}$ n'est pas fini sur $R[Z_G]$ alors il existe une valuation $\nu : K_{\mathfrak{P}} \longrightarrow \mathbb{R}$ et un $m\in M\cap[G,G]$ tels que $\nu(\psi(m))\neq 0$, où $\psi : M\longrightarrow K_{\mathfrak{P}}^\times$ désigne le caractère tautologique.

Pour abréger, notons R_G l'image de $R[Z_G]$ dans $R[M/M^c]/\mathfrak{P}$ et K_G son corps de fractions. L'anneau $R[M/M^c]/\mathfrak{P}$ est fini sur l'anneau engendré par R_G et $\psi(M\cap[G,G])$. Soit d le degré de transcendance de $K_{\mathfrak{P}}$ sur K_G. Deux cas se présentent :

Si $d>0$, alors il existe $m\in M\cap[G,G]$ tel que $\psi(m)$ soit transcendant sur K_G. On pose $\nu(\psi(m))=1$ et on étend de manière arbitraire la valuation obtenue à $K_{\mathfrak{P}}$.

Si $d=0$, notons $\widetilde{R}_G$ la clôture intégrale de R_G dans $K_{\mathfrak{P}}$. Puisque $R[M/M^c]/\mathfrak{P}$ est de type fini sur R_G, il n'est pas inclus dans $\widetilde{R}_G$ (sinon, il serait fini puisqu'entier et contredirait notre hypothèse). L'anneau $\widetilde{R}_G$ n'est pas nécessairement noethérien, mais il est "de Krull" [5, 1.4 Corollaire], donc est l'intersection des localisés en ses idéaux premiers de hauteur 1. On peut donc trouver un élément $m\in M\cap[G,G]$ et un tel localisé ne contenant pas $\psi(m)$. Or ce localisé est normal lui aussi donc est un anneau de valuation discrète. La valuation associée est nécessairement non-nulle sur $\psi(m)$ et s'étend au corps de fractions qui par hypothèse n'est autre que $K_{\mathfrak{P}}$.

Fin de la preuve : Supposons que $R[M/M^c]/\mathfrak{P}$ n'est pas fini sur $R[Z_G]$ et choisissons une valuation de $\mathcal{K}_{\mathfrak{P}}$ comme dans l'étape précédente. Ainsi la composée $\nu\circ\psi$ est un élément non nul de l'espace vectoriel ${a_M^G}^* := Hom(M/M^c,\mathbb{R})/Hom(G/G^c,\mathbb{R})$. Nous renvoyons à [13, 2.2] pour la définition des chambres de Weyl $(a_Q^*)^+$ dans ${a_M^G}^*$ associées aux paraboliques Q dont M est une composante de Levi. Il existe un Q tel que $\nu\circ\psi$ soit dans l'adhérence $\overline{(a_Q^*)^+}$ de $(a_Q^*)^+$. Cette adhérence est réunion disjointe [13, 2.3] de chambres de Weyl de paraboliques O contenant Q, *i.e.*

$$\overline{(a_Q^*)^+} = \bigsqcup_{Q\subseteq O\subseteq G} (a_O^*)^+.$$

Soit O l'unique parabolique contenant Q tel que $\nu\circ\psi\in(a_O^*)^+$. Puisque $\nu\circ\psi\neq 0$, on a $O\neq G$. Soit N sa composante de Levi contenant M. Alors d'après le lemme 4.9 ci-dessous et [13, 3.16] joint à l'argument de [13, 7.3], les représentations $i^G_{M,Q}(\sigma\otimes\overline{K_{\mathfrak{P}}})$ et $i^N_{M,N\cap Q}(\sigma\otimes\overline{K_{\mathfrak{P}}})$ ont la même longueur ($\overline{K_{\mathfrak{P}}}$ désigne une clôture algébrique de $K_{\mathfrak{P}}$) ; plus précisément, tout sous-quotient irréductible de la seconde s'induit irréductiblement par le foncteur $i^G_{N,O}$. Il s'ensuit que l'induite $i^G_{M,Q}(\sigma\otimes K_{\mathfrak{P}})$ *ne peut pas avoir de* $K_{\mathfrak{P}}G$*-sous-quotient cuspidal*, ce qui contredit l'énoncé de l'étape 3. Cela conclut la preuve du lemme et de la proposition 4.3. □

Dans la preuve précédente, nous avons à deux reprises fait appel à certains résultats de [13], comme par exemple la propriété *d'irréductibilité générique*. Dans [13], ceux-ci sont énoncés sous la condition que G possède un sous-groupe discret cocompact, mais cette condition ne sert qu'à assurer qu'une certaine propriété (ν-discret implique cuspidal, *cf* ci-dessous) soit vraie. Le lemme suivant montre comment l'hypothèse (Adj) implique directement cette propriété.

Lemme 4.9 *Soit $\mathcal{K}$ un R-corps et ν une valuation discrète de $\mathcal{K}$. Soit (π, V) une représentation admissible dans* $\mathrm{Mod}_{\mathcal{K}}(G)$ *dont les coefficients matriciels* tendent essentiellement vers 0 à l'infini *pour la norme associée à ν (*cf *[13, 3.18] où une telle représentation est dite ν-discrète). Alors π est cuspidale.*

Preuve : Soit $\mathcal{O}$ l'anneau de la valuation ν et ϖ une uniformisante. Par [13, Prop 6.3], il existe un sous-$\mathcal{O}$-module G-stable et $\mathcal{O}$-admissible $\omega\subset V$ qui engendre V sur $\mathcal{K}$. Puisque les coefficients matriciels tendent essentiellement vers 0, il en est de même des application $f_v:\ g\in G\mapsto e_H gv\in\omega$ pour $v\in\omega$ et H prop-p-sous-groupe ouvert, en le sens suivant :

$$\forall n\in\mathbb{N}, f_v^{-1}(\omega\setminus\varpi^n\omega) \text{ est compact modulo le centre.}$$

En d'autres termes chaque, $\omega/\varpi^n\omega$ est cuspidal. Puisque les foncteurs r^M_G ont des adjoints à gauche, il commutent aux limites projectives et par conséquent la limite $\varprojlim_n \omega/\varpi^n\omega$ est cuspidale elle-aussi. Or, par admissibilité la flèche canonique $\omega\longrightarrow\varprojlim_n\omega/\varpi^n\omega$ est injective et ω et donc π sont cuspidales.

□

5 Modèles entiers lisses

On note toujours $\mathcal{G}$ un groupe réductif connexe sur K. Nous commençons par donner les énoncés principaux de cette section, puis nous passerons aux preuves.

5.1 *Définitions et principaux énoncés :* Soit $\underline{\mathcal{G}}$ un modèle lisse et connexe de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{O}_K$, *i.e.* un schéma en groupes lisse sur $\mathcal{O}_K$ à fibres connexes, et muni d'une identification de sa fibre générique avec $\mathcal{G}$. Pour un sous-groupe fermé $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}$ nous noterons $\underline{\mathcal{H}}$ son adhérence schématique dans $\underline{\mathcal{G}}$; ses points entiers sont donc donnés par $\underline{\mathcal{H}}(\mathcal{O}_K)=\mathcal{H}(K)\cap\underline{\mathcal{G}}(\mathcal{O}_K)$.

Si $\mathcal{P}$ est un sous-groupe parabolique de $\mathcal{G}$, nous dirons qu'il est $\underline{\mathcal{G}}$*-admissible* s'il admet une composante de Levi $\mathcal{M}$ de la forme $\mathcal{Z}_{\mathcal{G}}(\mathcal{S})$ pour un sous-tore déployé $\mathcal{S}$ de $\mathcal{G}$ qui se prolonge en un sous-tore de $\underline{\mathcal{G}}$ (un tel prolongement est nécessairement fermé par [14, Exp. VIII. Cor 5.7] donc égal à $\underline{\mathcal{S}}$). Le sous-groupe de Levi $\mathcal{M}$ est alors dit lui aussi $\underline{\mathcal{G}}$*-admissible*, et son adhérence $\underline{\mathcal{M}}$ est le centralisateur $\mathcal{Z}_{\underline{\mathcal{G}}}(\underline{\mathcal{S}})$ de $\underline{\mathcal{S}}$ dans $\mathcal{G}$; celui-ci est lisse sur $\mathcal{O}_K$ par [14, Exp. XI, Cor. 5.3] et connexe puisque les centralisateurs de tores dans les groupes connexes sur un corps sont connexes.

Nous utiliserons souvent la technique élégante de *dilatation* dûe à Raynaud, [4, 3.2], et introduite dans le présent contexte par Yu [26]. Soit $\underline{\mathcal{G}}^\dagger\xrightarrow{\nu_{\underline{\mathcal{G}}}}\underline{\mathcal{G}}$ la dilatation dans $\underline{\mathcal{G}}$ du radical unipotent ${}^u\underline{\mathcal{G}}_k$ de la fibre spéciale de $\underline{\mathcal{G}}$. Par définition d'une dilatation, on sait que $\nu_{\underline{\mathcal{G}}}$ induit un isomorphisme des fibres génériques $\underline{\mathcal{G}}^\dagger_K\xrightarrow{\sim}\underline{\mathcal{G}}_K\simeq\mathcal{G}$ et que $\underline{\mathcal{G}}^\dagger(\mathcal{O}_K)=\{g\in\underline{\mathcal{G}}(\mathcal{O}_K),\ g \bmod \varpi\in {}^u\mathcal{G}_k(k)\}$. On sait aussi que $\underline{\mathcal{G}}^\dagger$ est un schéma en groupes lisse [4, 3.2 Prop 3], donc un modèle lisse de $\mathcal{G}$. Convenons de noter $\underline{\mathcal{H}}^\dagger$ l'adhérence schématique dans $\underline{\mathcal{G}}^\dagger$ d'un sous-groupe fermé $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}$. La restriction de $\nu_{\underline{\mathcal{G}}}$ induit un morphisme $\underline{\mathcal{H}}^\dagger\longrightarrow\underline{\mathcal{H}}$ qui s'identifie à la dilatation dans $\underline{\mathcal{H}}$ de $\underline{\mathcal{H}}_k\cap{}^u\underline{\mathcal{G}}_k$.

Dans le cas où $\mathcal{H} = \mathcal{M}$ est un Levi admissible, alors $\underline{\mathcal{M}}_k$ est de la forme $\mathcal{Z}_{\underline{\mathcal{G}}_k}(\underline{\mathcal{S}}_k)$ pour un tore $\mathcal{S}_k$, et on a l'égalité ${}^u\underline{\mathcal{M}}_k = \underline{\mathcal{M}}_k \cap {}^u\underline{\mathcal{G}}_k$ d'après [14, Exp XIX, 1.3]. Le morphisme $\underline{\mathcal{M}}^\dagger \xrightarrow{\nu_{\underline{\mathcal{G}}}} \underline{\mathcal{M}}$ coïncide donc avec le morphisme de dilatation $\nu_{\underline{\mathcal{M}}}$ du radical unipotent de la fibre spéciale de $\underline{\mathcal{M}}$.

Notons maintenant avec des lettres droites les ensembles de points entiers, par exemple $\underline{H} = \underline{\mathcal{H}}(\mathcal{O}_K)$. Notons que $\underline{H}$ est pro-p si et seulement si ${}^u\underline{\mathcal{H}}_k$ est unipotent. En particulier, $\underline{H}^\dagger := \underline{\mathcal{H}}^\dagger(\mathcal{O}_K)$ est pro-p.

Lemme 5.2 *Soit R un anneau commutatif unitaire où p est inversible. Pour un idempotent central ε de $R\underline{G}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $\varepsilon \in R\underline{G}^\dagger e_{\underline{U}^\dagger} R\underline{G}^\dagger$ pour tout sous-groupe parabolique $\underline{\mathcal{G}}$-admissible $\mathcal{P} = \mathcal{M}\mathcal{U}$ de $\mathcal{G}$.

ii) $\varepsilon \in R\underline{G}^\dagger e_{\underline{U}^\dagger} e_{\overline{\underline{U}}^\dagger} R\underline{G}^\dagger$ pour une paire de sous-groupes paraboliques opposés $\underline{\mathcal{G}}$-admissibles minimaux $(\mathcal{P}, \overline{\mathcal{P}})$ de $\mathcal{G}$

Un idempotent satisfaisant ces propriétés sera dit essentiellement de niveau zéro.

Remarque : L'expression $R\underline{G}^\dagger e^\dagger_{\underline{U}} R\underline{G}^\dagger$ désigne le *R-module engendré* par les distributions du type $\varphi * e_\Omega * \psi$ où $\varphi, \psi \in R\underline{G}^\dagger$. Cette remarque s'applique à toutes les expressions de ce genre que l'on rencontrera dans la suite de ce paragraphe.

Remarquons aussi que l'idempotent associé à un caractère lisse $\theta : \underline{G}^\dagger \longrightarrow R^\times$ normalisé par $\underline{G}$ est essentiellement de niveau zéro si et seulement si $\theta_{|\underline{U}^\dagger}$ et $\theta_{|\overline{\underline{U}}^\dagger}$ sont triviaux pour au moins une paire de paraboliques opposés $\underline{\mathcal{G}}$-admissibles minimaux. Le lemme suivant étudie une situation plus générale, que l'on rencontre souvent dans la théorie des types.

Proposition 5.3 *Soit $\underline{G}^*$ un sous-groupe ouvert normal de $\underline{G}$ tel que $[\underline{G}^\dagger, \underline{G}^\dagger] \subseteq \underline{G}^* \subseteq \underline{G}^\dagger$ et $\theta : \underline{G}^* \longrightarrow R^\times$ un caractère lisse normalisé par $\underline{G}$. On suppose que pour une paire $(\mathcal{P}, \overline{\mathcal{P}})$ de sous-groupes paraboliques opposés $\underline{\mathcal{G}}$-admissibles minimaux, on a*

i) $\theta_{|\underline{U}^*}$ et $\theta_{|\overline{\underline{U}}^*}$ sont triviaux (où l'$*$ désigne l'intersection avec $\underline{G}^*$).

ii) L'accouplement $\begin{array}{ccc} \underline{U}^\dagger/\underline{U}^* \times \overline{\underline{U}}^\dagger/\overline{\underline{U}}^* & \to & R^\times \\ (u,v) & \mapsto & \theta([u,v]) \end{array}$ *est non-dégénéré.*

Alors l'idempotent central $[\theta]$ de $R\underline{G}^\dagger$ associé à θ est essentiellement de niveau zéro.

Dans les exemples que l'auteur connait, le groupe $\underline{G}^*$ est le groupe des points entiers d'un modèle lisse connexe $\underline{\mathcal{G}}^*$ obtenu par dilatation dans $\underline{\mathcal{G}}$ d'un sous-groupe normal compris entre $[{}^u\underline{\mathcal{G}}_k, {}^u\underline{\mathcal{G}}_k]$ et ${}^u\underline{\mathcal{G}}_k$.

Si $\mathcal{M}$ est un sous-groupe de Levi $\underline{\mathcal{G}}$-admissible de $\mathcal{G}$, on a vu que $\underline{\mathcal{M}}$ est un modèle lisse connexe de $\mathcal{M}$. On peut donc appliquer à $\underline{\mathcal{M}}$ la notion d'idempotent essentiellement de niveau 0 de $R\underline{M}$ définie en 5.2.

Le théorème suivant est une généralisation du théorème principal de [16].

Théorème 5.4 *Soit $\underline{\mathcal{G}}$ un modèle lisse et connexe de $\mathcal{G}$ et $(\mathcal{P} = \mathcal{M}\mathcal{U}, \overline{\mathcal{P}} = \mathcal{M}\overline{\mathcal{U}})$ une paire de paraboliques $\underline{\mathcal{G}}$-admissibles opposés de $\mathcal{G}$. Pour tout idempotent central essentiellement de niveau zéro ε de $R\underline{M}$, on a*

$$e_{\underline{U}^\dagger} e_{\overline{\underline{U}}} \varepsilon \in R\underline{G} e_{\underline{U}} e_{\overline{\underline{U}}} \varepsilon.$$

Ce résultat général ne sera toutefois pas suffisant pour les applications. On se donne maintenant un autre modèle lisse connexe $\underline{\mathcal{G}}'$ de $\mathcal{G}$ ainsi qu'un morphisme $\underline{\mathcal{G}}' \xrightarrow{\varphi} \underline{\mathcal{G}}$ de $\mathcal{O}_K$-schémas en groupes dont la fibre générique est un isomorphisme.

Lemme 5.5 *Le noyau de $\varphi_k : \underline{\mathcal{G}}'_k \longrightarrow \underline{\mathcal{G}}_k$ est unipotent, lisse et connexe.*

En particulier, si $\underline{\mathcal{S}}'$ est un sous-tore de $\underline{\mathcal{G}}'$, alors $\varphi_{|\underline{\mathcal{S}}'}$ est un monomorphisme (et donc une immersion fermée par [14, Exp VIII Cor. 5.7]) de $\underline{\mathcal{S}}'$ dans $\underline{\mathcal{G}}$. Il s'ensuit que si un sous-groupe parabolique de $\mathcal{G}$ est $\underline{\mathcal{G}}'$-admissible, alors il est $\underline{\mathcal{G}}$-admissible. Nous décorerons d'un $'$ les objets définis comme ci-dessus relatifs à $\underline{\mathcal{G}}'$. Par exemple, $\underline{\mathcal{G}}'^\dagger$ désignera la dilatation du radical unipotent de $\underline{\mathcal{G}}'$. Notons que d'après le lemme ci-dessus, on a ${}^u\underline{\mathcal{G}}'_k = \varphi_k^{-1}({}^u\, im\,(\varphi_k))$. On en déduit aussi les équivalences suivantes :

$$\left(\underline{G}' \cap \underline{G}^\dagger \subseteq \underline{G}'^\dagger\right) \Leftrightarrow \left(\varphi^{-1}({}^u\underline{\mathcal{G}}_k) \supseteq {}^u\underline{\mathcal{G}}'_k\right) \Leftrightarrow \left(im\,(\varphi_k) \cap {}^u\underline{\mathcal{G}}_k \text{ connexe}\right)$$

$$\left(\underline{G}' \cap \underline{G}^\dagger = \underline{G}'^\dagger\right) \Leftrightarrow \left(\varphi^{-1}({}^u\underline{\mathcal{G}}_k) = {}^u\underline{\mathcal{G}}'_k\right) \Leftrightarrow \left({}^u(im\ \varphi_k) = im\ \varphi_k \cap {}^u\underline{\mathcal{G}}_k\right)$$

La situation un peu alambiquée étudiée dans le résultat suivant est, encore une fois, motivée par les exemples connus de la théorie des types.

Corollaire 5.6 *Gardons les notations ci-dessus avec l'hypothèse $\underline{G}' \cap \underline{G}^\dagger \subseteq \underline{G}'^\dagger$. Soit ε' un idempotent central essentiellement de niveau zéro de $R\underline{M}'$, et supposons qu'il existe un idempotent $\widetilde{\varepsilon}'$ de $R\underline{G}'^\dagger$, centralisé par $\underline{G}'$ et satisfaisant les propriétés suivantes :*

i) $e_{\overline{\underline{U}'}^\dagger}\widetilde{\varepsilon}' e_{\underline{U}'^\dagger} = e_{\overline{\underline{U}'}^\dagger}\varepsilon' e_{\underline{U}'^\dagger}$ et $e_{\underline{U}'^\dagger}\widetilde{\varepsilon}' e_{\overline{\underline{U}'}^\dagger} = e_{\underline{U}'^\dagger}\varepsilon' e_{\overline{\underline{U}'}^\dagger}$.

ii) l'ensemble d'entrelacement $Int_{\underline{U}}(\widetilde{\varepsilon}') := \{u \in \underline{U}, \widetilde{\varepsilon}' u \widetilde{\varepsilon}' \neq 0\}$ est contenu dans (donc égal à) $\underline{U}'$.

Alors

$$e_{\underline{U}^\dagger} e_{\overline{\underline{U}}} \varepsilon' \in R\underline{G} e_{\underline{U}} e_{\overline{\underline{U}}} \varepsilon'.$$

5.7 *Les preuves :* Rappelons que si $\underline{\mathcal{S}}$ est un $\mathcal{O}_K$-tore, alors tout morphisme $\underline{\mathcal{S}}_k \longrightarrow \underline{\mathcal{G}}_k$ se relève de manière unique à conjugaison près en un morphisme $\underline{\mathcal{S}} \longrightarrow \underline{\mathcal{G}}$, voir [14, Exp IX, Thm 3.6]. En particulier les sous-tores déployés maximaux de la fibre spéciale de $\underline{\mathcal{G}}_k$ se relèvent en des sous-tores déployés de $\underline{\mathcal{G}}$, nécessairement fermés par [14, Exp VIII, Cor. 5.6]. Leurs fibres génériques sont des tores déployés, mais généralement *pas maximaux* dans $\mathcal{G}$. Fixons un tel sous-tore $\underline{\mathcal{S}}$ et notons $\mathcal{S}$ sa fibre générique, $X^*(\mathcal{S})$ son réseau de caractères et $V := X^*(\mathcal{S}) \otimes \mathbb{R}$. Posons aussi $\Phi := \Phi(\underline{\mathcal{S}}_k, \mathrm{Lie}(\underline{\mathcal{G}}_k)) = \Phi(\mathcal{S}, \mathrm{Lie}(\mathcal{G})) \subset V$, l'ensemble des poids non-nuls de $\mathcal{S}$ dans l'algèbre de Lie de $\mathcal{G}$. C'est un ensemble symétrique puisque $\mathcal{G}$ est réductif. Reprenant la terminologie de Bruhat-Tits [9, 1.1.2], une demi-droite ouverte $\widetilde{\alpha}$ de V contenant une racine de Φ sera appelée *rayon radiciel de* Φ. L'ensemble de ces rayons radiciels sera noté $\widetilde{\Phi}$, et l'image d'un sous-ensemble Ω de Φ dans $\widetilde{\Phi}$ sera notée $\widetilde{\Omega}$.

À tout rayon radiciel $\widetilde{\alpha} \in \widetilde{\Phi}$ est associé un K-sous-groupe algébrique fermé connexe $\mathcal{U}_{\widetilde{\alpha}}$ de $\mathcal{G}$, dont les poids de $\mathcal{S}$ dans l'algèbre de Lie appartiennent à $\widetilde{\alpha}$, et qui est maximal pour ces propriétés *cf* [9, 1.1.3]. On prolonge cette définition à $\widetilde{\alpha} = 0$ en posant $\mathcal{U}_0 := \mathcal{Z}_{\mathcal{G}}(\mathcal{S})$ le centralisateur de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{G}$. Plus généralement, si $\Omega \subset \Phi \cup \{0\}$, on note $\mathcal{U}_\Omega$ le sous-groupe fermé de $\mathcal{G}$ engendré par les $\mathcal{U}_{\widetilde{\alpha}}$ pour $\widetilde{\alpha} \in \widetilde{\Omega}$.

Rappelons qu'un sous-ensemble Ω de Φ est dit *parabolique* s'il est l'intersection de Φ avec un demi-espace fermé, et *unipotent* s'il est l'intersection de Φ avec un demi-espace ouvert. Si $v^* \in V^*$ est une forme linéaire sur V, la composante de Levi du sous-ensemble parabolique $\Omega(v^*) := \{\alpha \in \Phi,\ v^*(\alpha) \geqslant 0\}$ est par définition $\Omega^0(v^*) := \{\alpha \in \Phi,\ v^*(\alpha) = 0\} = \Omega \cap (-\Omega)$, tandis que sa composante unipotente est $\Omega^+(v^*) := \{\alpha \in \Phi,\ v^*(\alpha) > 0\}$ et sa composante unipotente *opposée* est $\Omega^-(v^*) := -\Omega^+ = \Phi \setminus \Omega$. Le groupe $\mathcal{P}_\Omega := \mathcal{U}_{\Omega \cup \{0\}}$ est un sous-groupe parabolique de $\mathcal{G}$ dont le radical unipotent est $\mathcal{U}_{\Omega^+}$ et la composante de Levi est $\mathcal{M}_\Omega := \mathcal{U}_{\Omega^0 \cup \{0\}}$. L'opposé de $\mathcal{P}_\Omega$ par rapport à $\mathcal{M}_\Omega$ est $\mathcal{P}_{-\Omega}$ dont le radical unipotent est $\mathcal{U}_{\Omega^-}$.

Fait 5.8 *Un sous-groupe parabolique $\mathcal{P}$ de $\mathcal{G}$ est $\underline{\mathcal{G}}$-admissible si et seulement si il est conjugué par un élément de $\underline{\mathcal{G}}(\mathcal{O}_K)$ à un groupe de la forme $\mathcal{P}_\Omega$ pour un sous-ensemble parabolique $\Omega \subset \Phi$.*

Preuve : Vérifions tout d'abord que $\mathcal{M}_\Omega$ est $\underline{\mathcal{G}}$-admissible (et donc $\mathcal{P}_\Omega$ aussi). Soit $\mathcal{S}_\Omega := (\cap_{\alpha \in \Omega^0} \mathit{ker}\ \alpha)^\circ$. En tant que sous-tore de $\mathcal{S}$, il se prolonge en un sous-tore déployé de $\underline{\mathcal{S}}$, et ses poids dans $\mathrm{Lie}(\mathcal{M}_\Omega)$, resp. dans $\mathrm{Lie}(\mathcal{U}_{\Omega^\pm})$, sont par construction tous nuls, resp. tous non-nuls. Puisque $\mathcal{Z}_{\mathcal{G}}(\mathcal{S}_\Omega)$ est lisse et connexe, et puisque $\mathrm{Lie}(\mathcal{G}) = \mathrm{Lie}(\mathcal{U}_{\Omega^+}) + \mathrm{Lie}(\mathcal{M}_\Omega) + \mathrm{Lie}(\mathcal{U}_{\Omega^-})$, on a $\mathcal{Z}_{\mathcal{G}}(\mathcal{S}_\Omega) = \mathcal{M}_\Omega$ et $\mathcal{M}_\Omega$ est $\underline{\mathcal{G}}$-admissible.

Réciproquement, soit $\mathcal{P}$ un parabolique $\underline{\mathcal{G}}$-admissible, et $\mathcal{M}$ une composante de Levi de la forme $\mathcal{Z}_{\mathcal{G}}(\mathcal{T})$ pour un tore $\mathcal{T}$ déployé qui se prolonge en un sous-tore déployé $\underline{\mathcal{T}}$ de $\underline{\mathcal{G}}$. Comme la fibre spéciale de $\underline{\mathcal{T}}$ est conjuguée par un élément de $\underline{\mathcal{G}}_k(k)$ à un sous-tore de $\underline{\mathcal{S}}_k$, il résulte de [14, Exp. XI, Thm 5.2 bis] que $\mathcal{T}$ est lui-même conjugué par un élément de $\underline{\mathcal{G}}(\mathcal{O}_K)$ à un sous-tore de $\mathcal{S}$. On peut donc supposer $\mathcal{M} \supset \mathcal{S}$. On a alors $\mathcal{P} = \mathcal{P}_\Omega$ pour $\Omega := \Phi(\mathcal{S}, \mathrm{Lie}(\mathcal{P}))$.

□

Les paraboliques de la forme $\mathcal{P}_\Omega$ seront dits *semi-standards* (relativement au choix du tore déployé maximal $\underline{\mathcal{S}}$ de $\underline{\mathcal{G}}$).

Fait 5.9 *(Bruhat-Tits) Soit $(\mathcal{P}, \overline{\mathcal{P}})$ une paire de sous-groupes paraboliques de $\mathcal{G}$ de composante de Levi commune $\mathcal{M}$ supposée $\underline{\mathcal{G}}$-admissible. Alors*

i) le morphisme produit induit un isomorphisme $\underline{\mathcal{U}} \rtimes \underline{\mathcal{M}} \longrightarrow \underline{\mathcal{P}}$.

ii) le morphisme produit induit une immersion ouverte $\underline{\mathcal{C}} := \underline{\mathcal{U}} \times \underline{\mathcal{M}} \times \overline{\underline{\mathcal{U}}} \xrightarrow{\mu} \underline{\mathcal{G}}$. En particulier, $\underline{\mathcal{U}}$ et $\overline{\underline{\mathcal{U}}}$ sont lisses et connexes. De plus l'image de μ est le complémentaire d'un diviseur.

iii) le morphisme produit induit un isomorphisme $({}^u\underline{\mathcal{G}}_k \cap \underline{\mathcal{U}}_k) \times ({}^u\underline{\mathcal{G}}_k \cap \underline{\mathcal{M}}_k) \times ({}^u\underline{\mathcal{G}}_k \cap \overline{\underline{\mathcal{U}}_k}) \xrightarrow{\sim} {}^u\underline{\mathcal{G}}_k$, et de plus on a ${}^u\underline{\mathcal{G}}_k \cap \underline{\mathcal{M}}_k = {}^u\underline{\mathcal{M}}_k$.

iv) Supposons $\mathcal{P}$ et $\overline{\mathcal{P}}$ semi-standards et soit $\mathcal{Q}$ un autre parabolique $\underline{\mathcal{G}}$-admissible semi-standard, de radical unipotent $\mathcal{V}$. Alors l'application produit $(\underline{V} \cap \underline{U}) \times (\underline{V} \cap \underline{M}) \times (\underline{V} \cap \overline{\underline{U}}) \longrightarrow \underline{V}$ est bijective.

Preuve : Compte tenu de 5.8, les deux premiers points sont donnés par [9, 2.2.3 ii) et iii)]. Pour le troisième point, la décomposition de ${}^u\underline{\mathcal{G}}_k$ est donnée par [9, 1.1.11] et la relation entre les radicaux unipotents a déja été mentionnée plus haut. Une fois choisis des ensembles Ω et Θ tels que $\mathcal{P} = \mathcal{P}_\Omega$ et $\mathcal{Q} = \mathcal{P}_\Theta$, le point iv) est donné par [9, 2.2.3 i)]. □

Si dans le point iv) on prend $\mathcal{P}$ minimal, de sorte que $\mathcal{V} \cap \mathcal{M} = \{1\}$, on obtient pour les idempotents associés $e_{V^\dagger} = e_{V^\dagger \cap U} e_{V^\dagger \cap \overline{U}}$. Ceci combiné à 5.8 montre l'implication *ii)* ⇒ *i)* de 5.2. Pour voir l'implication réciproque, fixons une paire $(\mathcal{P}, \overline{\mathcal{P}})$ comme dans 5.2 ii). Sous l'hypothèse 5.2 i), on a $\varepsilon \in R\underline{G}^\dagger e_{\underline{U}^\dagger} R\underline{G}^\dagger \cap R\underline{G}^\dagger e_{\overline{\underline{U}}^\dagger} R\underline{G}^\dagger$ donc $\varepsilon \in R\underline{G}^\dagger e_{\underline{U}^\dagger} R\underline{G}^\dagger e_{\overline{\underline{U}}^\dagger} R\underline{G}^\dagger$ puisque ε est idempotent. Or par le lemme ci-dessous appliqué à $\underline{G}' = \underline{G}^\dagger$, on a une décomposition d'Iwahori $\underline{G}^\dagger = \underline{U}^\dagger \underline{M}^\dagger \overline{\underline{U}}^\dagger$, et donc $e_{\underline{U}^\dagger} R\underline{G}^\dagger e_{\overline{\underline{U}}^\dagger} = R\underline{M}^\dagger e_{\underline{U}^\dagger} e_{\overline{\underline{U}}^\dagger}$. Ceci clôt la preuve de 5.2.

Lemme 5.10 *Soit $(\mathcal{P}, \overline{\mathcal{P}})$ une paire de paraboliques $\underline{\mathcal{G}}$-admissibles opposés, et $\underline{\mathcal{G}}' \xrightarrow{\varphi} \underline{\mathcal{G}}$ la dilatation dans $\underline{\mathcal{G}}$ d'un sous-groupe lisse connexe $\mathcal{H}_k$ de $\underline{\mathcal{G}}_k$ de la forme $(\mathcal{H}_k \cap \underline{\mathcal{U}}_k)(\mathcal{H}_k \cap \underline{\mathcal{M}}_k)(\mathcal{H}_k \cap \overline{\underline{\mathcal{U}}}_k)$. Alors le triplet $(\underline{U}', \underline{M}', \overline{\underline{U}}')$ induit une décomposition d'Iwahori de $\underline{G}' = \underline{\mathcal{G}}'(\mathcal{O}_K)$ au sens de 2.1.*

Preuve : Il est sous-entendu dans l'énoncé que les notations $\underline{U}'$, etc..., désignent les groupes de points entiers des adhérences schématiques $\underline{\mathcal{U}}'$, etc..., de $\mathcal{U}$, etc... dans $\underline{\mathcal{G}}'$. Ces groupes sont bien fermés dans $\underline{G}'$ et satisfont les hypothèses du préambule de 2.1.

Montrons qu'ils satisfont le point i) de 2.1. On a déja remarqué que la restriction $\underline{\mathcal{U}}' \longrightarrow \underline{\mathcal{U}}$ de φ s'identifie à la dilatation de $\mathcal{H}_k \cap \underline{\mathcal{U}}_k$ dans $\underline{\mathcal{U}}$. Reprenons alors les notations de 5.9 ii). L'ouvert réciproque $\underline{\mathcal{C}}'$ de $\underline{\mathcal{C}}$ dans $\underline{\mathcal{G}}'$ s'identifie à la dilatation dans $\underline{\mathcal{C}}$ de $\mathcal{H}_k$ (qui par hypothèse est bien contenu dans $\underline{\mathcal{C}}_k$). Par commutation des dilatations aux produits ou par application de [9, 2.2.3], on a $\underline{\mathcal{C}}' = \underline{\mathcal{U}}' \times \underline{\mathcal{M}}' \times \underline{\mathcal{U}}'$ et l'immersion ouverte dans $\underline{\mathcal{G}}'$ est donnée par le produit μ' dans $\underline{\mathcal{G}}'$. Soit alors $d \in \mathcal{O}_K[\underline{\mathcal{G}}]$ une équation du diviseur complémentaire de $\underline{\mathcal{C}}$ dans $\underline{\mathcal{G}}$. On a donc $\mathcal{O}_K[\underline{\mathcal{C}}] = \mathcal{O}_K[\underline{\mathcal{G}}][1/d]$ et $\mathcal{O}_K[\underline{\mathcal{C}}'] = \mathcal{O}_K[\underline{\mathcal{G}}'][1/d]$. Comme le support $\mathcal{H}_k$ de la dilatation effectuée dans $\underline{\mathcal{G}}$ est disjoint du diviseur $d = 0$, l'élément d est inversible dans le localisé $\mathcal{O}_K[\underline{\mathcal{G}}']_{(\varpi)}$, et on a donc $\mathcal{O}_K[\underline{\mathcal{C}}']_{(\varpi)} \simeq \mathcal{O}_K[\underline{\mathcal{G}}']_{(\varpi)}$. En particulier μ' induit une bijection $\underline{\mathcal{C}}'(\mathcal{O}_K) \longrightarrow \underline{\mathcal{G}}'(\mathcal{O}_K)$. D'où le point i) de 2.1.

Pour obtenir le point ii), on remarque que la discussion ci-dessus s'applique à la dilatation $\underline{\mathcal{G}}^1 \longrightarrow \underline{\mathcal{G}}$ de l'unité de $\underline{\mathcal{G}}_k$ dans $\underline{\mathcal{G}}$, et par récurrence, aux dilatations successives $\underline{\mathcal{G}}^n \longrightarrow \underline{\mathcal{G}}^{n-1}$ de l'unité de la fibre spéciale. Or les groupes $\underline{G}^n = \underline{\mathcal{G}}^n(\mathcal{O}_K)$ sont les groupes de congruences de $\underline{\mathcal{G}}$; ils sont normaux et forment un système de voisinages ouverts de l'unité, *cf* [26, 2.8]. □

Si $\mathcal{P}$ est un sous-groupe parabolique $\underline{\mathcal{G}}$-admissible de $\mathcal{G}$, le groupe $\widetilde{\mathcal{P}}_k := {}^u\underline{\mathcal{G}}_k \underline{\mathcal{P}}_k$ est un sous-groupe parabolique de $\underline{\mathcal{G}}_k$. Plus précisément, supposons $\mathcal{P} = \mathcal{P}_\Omega$ comme dans 5.8, et introduisons le quotient réductif ${}^q\underline{\mathcal{G}}_k := \underline{\mathcal{G}}_k/{}^u\underline{\mathcal{G}}_k$ de $\underline{\mathcal{G}}_k$ et son système de racines $\Phi_\dagger := \Phi(\underline{\mathcal{S}}_k, {}^q\underline{\mathcal{G}}_k) \subseteq \Phi \subset V$. On vérifie alors que $\widetilde{\mathcal{P}}_k/{}^u\underline{\mathcal{G}}_k$ est le parabolique de ${}^q\underline{\mathcal{G}}_k$ contenant $\underline{\mathcal{S}}_k$ et associé au sous-ensemble parabolique $\Omega_\dagger := \Omega \cap \Phi_\dagger$ de $\Phi_\dagger$. L'application

$$\{\text{Paraboliques } \underline{\mathcal{G}}\text{-admissibles de } \mathcal{G}\} \longrightarrow \{\text{Paraboliques de } \underline{\mathcal{G}}_k\}$$

ainsi obtenue est croissante pour la relation de contenance, surjective, mais généralement pas injective. Nous appelons "co-rang résiduel" de $\mathcal{P}$ dans $\underline{\mathcal{G}}$ le co-rang du parabolique associé $\widetilde{\mathcal{P}}_k$ dans $\underline{\mathcal{G}}_k$. Il est toujours inférieur ou égal au co-rang de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{G}$.

On définit maintenant $\underline{\mathcal{G}}_{\mathcal{P}} \xrightarrow{\nu_{\mathcal{P}}} \underline{\mathcal{G}}$ la dilatation dans $\underline{\mathcal{G}}$ de $\widetilde{\mathcal{P}}_k$. Le $\mathcal{O}_K$-schéma $\underline{\mathcal{G}}_{\mathcal{P}}$ est un modèle lisse connexe de $\mathcal{G}$ qui a le même ensemble de paraboliques admissibles que $\underline{\mathcal{G}}$. Notons que $\mathcal{P}$ a un corang résiduel nul dans $\underline{\mathcal{G}}_{\mathcal{P}}$ et que $\nu_{\mathcal{P}}$ est un isomorphisme si et seulement si $\mathcal{P}$ a un corang résiduel nul dans $\underline{\mathcal{G}}$. De plus si $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$ est admissible, alors $(\underline{\mathcal{G}}_{\mathcal{P}})_{\mathcal{Q}} \simeq \underline{\mathcal{G}}_{\mathcal{Q}}$. Soit $\underline{\mathcal{G}}^\dagger_{\mathcal{P}} \longrightarrow \underline{\mathcal{G}}_{\mathcal{P}}$ la dilatation du radical unipotent de la fibre spéciale de $\underline{\mathcal{G}}_{\mathcal{P}}$. On prendra garde au fait que cette dilatation *ne se factorise pas* par $\underline{\mathcal{G}}^\dagger$ mais au contraire on a une flèche canonique $\underline{\mathcal{G}}^\dagger \longrightarrow \underline{\mathcal{G}}^\dagger_{\mathcal{P}}$ (penser aux groupes parahoriques : les relations de contenance des pro-p-radicaux sont opposées à celles des groupes eux-mêmes). En fait, $\underline{\mathcal{G}}^\dagger_{\mathcal{P}} \longrightarrow \underline{\mathcal{G}}$ s'identifie à la dilatation de ${}^u\widetilde{\mathcal{P}}_k$ dans $\underline{\mathcal{G}}$. On a donc, par définition, $\underline{G}_{\mathcal{P}} = \underline{G}^\dagger\underline{P}$ et $\underline{G}^\dagger_{\mathcal{P}} = \underline{G}^\dagger\underline{U}$, et par 5.10, le triplet $(\overline{\underline{U}}^\dagger, \underline{M}, \underline{U})$, resp. $(\overline{\underline{U}}^\dagger, \underline{M}^\dagger, \underline{U})$, induit une décomposition d'Iwahori de $\underline{G}_{\mathcal{P}}$, resp. $\underline{G}^\dagger_{\mathcal{P}}$.

Par ailleurs, si $\mathcal{Q}$ est un autre parabolique $\underline{\mathcal{G}}$-admissible, la projection $\underline{G} \longrightarrow {}^q\underline{\mathcal{G}}_k(k)$ induit une bijection des doubles classes :

$$\underline{Q}\backslash\underline{G}/\underline{G}_{\mathcal{P}} \simeq \underline{G}_{\mathcal{Q}}\backslash\underline{G}/\underline{P} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathcal{Q}}_k\backslash\underline{\mathcal{G}}_k/\widetilde{\mathcal{P}}_k.$$

Plus précisément, supposons $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{P}$ semi-standards pour un choix de tore déployé maximal $\underline{\mathcal{S}}$ dans $\underline{\mathcal{G}}$. D'après [14, Exp. XI, Cor. 5.3.bis], le $\mathcal{O}_K$-foncteur en groupes "normalisateur de $\underline{\mathcal{S}}$ dans $\underline{\mathcal{G}}$" est représentable par un schéma lisse sur $\mathcal{O}_K$. On sait [9, 1.1.13] que le groupe de Weyl $W(\Phi_\dagger)$ s'identifie à $W(\underline{\mathcal{S}}_k, \underline{\mathcal{G}}_k) := \mathcal{N}_{\underline{\mathcal{G}}}(\underline{\mathcal{S}})(k)/\mathcal{Z}_{\underline{\mathcal{G}}}(\underline{\mathcal{S}})(k)$. Par lissité, on peut donc relever chaque $w \in W(\underline{\mathcal{S}}_k, \underline{\mathcal{G}}_k)$ en une $\mathcal{O}_K$-section n_w de $\mathcal{N}_{\underline{\mathcal{G}}}(\underline{\mathcal{S}})$. On obtient ainsi une décomposition

$$\underline{G} = \bigsqcup_{w \in [W(\underline{\mathcal{S}}_k, \widetilde{\mathcal{Q}}_k)\backslash W(\underline{\mathcal{S}}_k, \underline{\mathcal{G}}_k)/W(\underline{\mathcal{S}}_k, \widetilde{\mathcal{P}}_k)]} \underline{P}_\Theta n_w \underline{P}_\Omega \underline{G}^\dagger \tag{5.11}$$

où les crochets désignent un ensemble de représentants des doubles classes dans $W(\underline{\mathcal{S}}_k, \underline{\mathcal{G}}_k)$.

5.12 *Preuve de 5.4 : réduction au co-rang résiduel* 1 : Commençons par remarquer que l'énoncé de 5.4 est vide lorsque $\mathcal{P}$ est de corang résiduel nul dans $\mathcal{G}$, puisqu'on a alors $\underline{U} = \underline{U}^\dagger$. Nous supposerons donc ce corang résiduel strictement positif et nous allons nous ramener au cas où il vaut 1. Pour cela, il sera pratique de supposer $\mathcal{P}$ semi-standard, *i.e.* de la forme $\mathcal{P}_\Omega$ pour un choix de tore maximal déployé $\underline{\mathcal{S}}$ dans $\underline{\mathcal{G}}$ et un sous-ensemble parabolique Ω de $\Phi(\mathcal{S}, \mathcal{G})$. Rappelons alors qu'on peut trouver une suite $\Omega_0 := -\Omega, \Omega_1, \cdots, \Omega_r := \Omega$ de sous-ensembles paraboliques de Φ, de composante de Levi commune Ω^0 et tels que

i) pour tout i, la réunion $\Theta_i := \Omega_{i-1} \cup \Omega_i$ est un sous-ensemble parabolique tel que $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(\Omega^0)$ est de codimension 1 dans $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(\Theta_i^0)$.

ii) la suite $\Omega^+ \cap \Omega_i^+$ est strictement croissante.

(Pour mémoire : les paraboliques dont la composante de Levi contient Ω^0 sont de la forme $\Omega(v^*)$ pour $v^* \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(\Omega^0)^\perp$. Les classes d'équivalence pour la relation $\Omega(v_1^*) = \Omega(v_2^*)$ sur $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(\Omega^0)^\perp$ sont les facettes d'une décomposition en cônes convexes. Les cônes ouverts (chambres) correspondent aux paraboliques de Levi Ω^0. On obtient des Ω_i comme dans l'énoncé en choisissant une galerie tendue (*i.e.* de longueur minimale, *cf* [8, 1.1]) entre les cônes correspondant à Ω et $-\Omega$.)

Posons alors $\underline{\mathcal{G}}_i := \underline{\mathcal{G}}_{\mathcal{P}_{\Theta_i}}$. Par construction, $\mathcal{P}$ est de co-rang résiduel $\leqslant 1$ dans chaque $\underline{\mathcal{G}}_i$.

Lemme 5.13 *Supposons que pour chaque i, l'énoncé de 5.4 est vérifié lorsqu'on remplace $\underline{\mathcal{G}}$ par $\underline{\mathcal{G}}_i$. Alors l'énoncé de 5.4 est vérifié pour $\underline{\mathcal{G}}$.*

Preuve : Restant cohérents avec le système de notations utilisé jusqu'ici, nous notons $\underline{\mathcal{U}}_i$, resp. $\underline{\mathcal{U}}_i^\dagger$, l'adhérence schématique de $\mathcal{U}$ dans $\underline{\mathcal{G}}_i$, resp. dans $\underline{\mathcal{G}}_i^\dagger$. Insistons sur le fait que le $\dagger$ de $\underline{\mathcal{G}}_i^\dagger$ se rapporte à $\underline{\mathcal{G}}_i$ et non à $\underline{\mathcal{G}}$, *cf* plus haut. En particulier $\underline{U}_i^\dagger$ est généralement distinct de $\underline{U}^\dagger \cap \underline{G}_i$.

Nous allons prouver

$$\overline{\underline{U}}_1 = \overline{\underline{U}},\ \ \overline{\underline{U}}_r^\dagger = \overline{\underline{U}}^\dagger \ \text{ et } \ \forall i = 1, \cdots, r,\ \ \overline{\underline{U}}_i^\dagger = \overline{\underline{U}}_{i+1} \tag{5.14}$$

et symétriquement

$$\underline{U}_1^\dagger = \underline{U}^\dagger,\ \ \underline{U}_r = \underline{U} \ \text{ et } \ \forall i = 1, \cdots, r,\ \ \underline{U}_i = \underline{U}_{i+1}^\dagger \tag{5.15}$$

De 5.14 nous retiendrons en particulier $e_{\overline{\underline{U}}} = e_{\overline{\underline{U}}_i} e_{\overline{\underline{U}}}$ pour tout $i = 1, \cdots, r$, de sorte que l'hypothèse du lemme nous donne

$$\forall i = 1, \cdots, r, \ \ e_{\underline{U}_i^\dagger} e_{\overline{\underline{U}}} \in R\underline{G}_i e_{\underline{U}_i} e_{\overline{\underline{U}}}.$$

On termine alors la preuve du lemme en écrivant grâce à 5.15

$$e_{\underline{U}^\dagger} e_{\overline{\underline{U}}} = e_{\underline{U}_1^\dagger} e_{\overline{\underline{U}}} \in R\underline{G} e_{\underline{U}_1} e_{\overline{\underline{U}}} = R\underline{G} e_{\underline{U}_2^\dagger} e_{\overline{\underline{U}}} \subset R\underline{G} e_{\underline{U}_2} e_{\overline{\underline{U}}} \cdots \subset R\underline{G} e_{\underline{U}_r} e_{\overline{\underline{U}}} = R\underline{G} e_{\underline{U}} e_{\overline{\underline{U}}}$$

où les $\cdots$ désignent une récurrence évidente. Reste donc à prouver 5.14 et 5.15. Pour des raisons de symétrie,on se contentera de prouver 5.15. Vue la définition de $\mathcal{G}_r$, l'égalité $\underline{U}_r = \underline{U}$ équivaut à la relation $\Omega^+ \subseteq \Theta_r$, laquelle est vraie puisque $\Theta_r \supset \Omega$. Vue la définition de $\mathcal{G}_1^\dagger$, l'égalité $\underline{U}_1^\dagger = \underline{U}^\dagger$ équivaut à la relation $\Omega^+ \subseteq -\Theta_1$, laquelle est assurée par $\Theta_1 \supset \Omega_0 = -\Omega$. Enfin pour $i = 1, \cdots, r$, vues les définitions de $\mathcal{G}_i$ et $\mathcal{G}_{i+1}^\dagger$, l'égalité $\underline{U}_i = \underline{U}_{i+1}^\dagger$ équivaut à l'identité $\Omega^+ \cap \Theta_i = \Omega^+ \cap \Theta_{i+1}^+$. Or,

$$\Omega^+ \cap \Theta_{i+1}^+ = \Omega^+ \cap (\Omega_i^+ \cap \Omega_{i+1}^+) = \Omega^+ \cap \Omega_i^+$$

par la propriété ii) de la suite $(\Omega_i)_i$, tandis que

$$\Omega^+ \cap \Theta_i = \Omega^+ \cap (\Omega_i \cup \Omega_{i-1}) = \Omega^+ \cap (\Omega_i^+ \cup \Omega_{i-1}^+) = \Omega^+ \cap \Omega_i^+,$$

par cette même propriété ii) (la deuxième égalité vient de $\Omega^+ \cap \Omega^0 = \emptyset$).

□

5.16 *Preuve de 5.4 : récurrence* : Fixons un modèle lisse connexe $\underline{\mathcal{G}}$ de $\mathcal{G}$. Nous allons démontrer le prédicat à trois variables suivant : *Pour tout couple $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$ de paraboliques admissibles et tout idempotent essentiellement de niveau zéro ε de $R\underline{M}$, l'énoncé de 5.4 est vrai pour $\mathcal{P}$, ε et pour $\underline{\mathcal{G}}_{\mathcal{Q}}$ à la place de $\underline{\mathcal{G}}$*, par récurrence sur $\mathcal{P}$, c'est à dire en le supposant vrai pour tout $\mathcal{P}' \subsetneq \mathcal{P}$. Il suffira alors de prendre $\mathcal{Q} = \mathcal{G}$ pour obtenir 5.4.

D'après 5.8, on peut supposer $\mathcal{P}$ et $\overline{\mathcal{P}}$ semi-standards relativement à un sous-tore déployé maximal $\underline{\mathcal{S}}$ de $\underline{\mathcal{G}}$. D'après le lemme précédent, on peut aussi supposer $\mathcal{P}$ de corang résiduel 1 dans $\underline{\mathcal{G}}_{\mathcal{Q}}$. Par ailleurs, $\underline{\mathcal{G}}_Q$ ayant les même propriétés formelles que $\underline{\mathcal{G}}$, nous pouvons supposer $\underline{\mathcal{G}}_{\mathcal{Q}} = \underline{\mathcal{G}}$ pour prouver le pas de récurrence, et $\mathcal{Q}$ n'apparaitra plus dans ce qui suit.

Enfin, en l'absence d'ambiguïté, nous allègerons les notations en cessant de souligner les groupes de points entiers ; $\underline{G}$ devient donc G, $\underline{U}^\dagger$ devient $U^\dagger$, etc...

Comme dans [16], le principe de la preuve repose sur l'égalité suivante dans RG :

$$[U : U^\dagger] e_{U^\dagger} e_{\overline{U}} e_U e_{\overline{U}} = e_{U^\dagger} e_{\overline{U}} e_{U^\dagger} e_{\overline{U}} + \sum_{u \in U/U^\dagger \setminus \{1\}} e_{U^\dagger} e_{\overline{U}} u e_{U^\dagger} e_{\overline{U}}.$$

D'après 2.2 appliqué à $G_{\overline{\mathcal{P}}} = U^\dagger M^\dagger \overline{U}$, il existe un élément central inversible $z_{\mathcal{P}}$ dans RM tel que $e_{U^\dagger} e_{\overline{U}} e_{U^\dagger} e_{\overline{U}} = z_{\mathcal{P}} e_{U^\dagger} e_{\overline{U}}$. Ainsi pour prouver l'énoncé de 5.4, il suffira de prouver que pour tout $u \in U \setminus U^\dagger$, on a

$$X(u) := \varepsilon e_{U^\dagger} e_{\overline{U}} u e_{U^\dagger} e_{\overline{U}} \varepsilon \in RG e_U e_{\overline{U}} \varepsilon. \tag{5.17}$$

D'après 5.11 appliquée à u, il existe un élément $n_w \in \mathcal{N}_{\underline{\mathcal{G}}}(\underline{\mathcal{S}})(\mathcal{O}_K)$ d'image $w \in W(\mathcal{S}_k, {}^q\underline{\mathcal{G}}_k) \setminus W(\mathcal{S}_k, {}^q\underline{\mathcal{M}}_k)$, des éléments $\overline{u}_i \in \overline{U}$ et $m_i \in M$ pour $i = 1,2$ et un élément $g^\dagger \in G^\dagger$ tels que $u = m_1\overline{u}_1 n_w \overline{u}_2 m_2 g^\dagger$. Puisque M normalise $\overline{U}$ et $U^\dagger$, il s'ensuit que

$$X(u) \in RM.\varepsilon e_{U^\dagger} e_{\overline{U}} n_w.RG^\dagger.e_{\overline{U}}\varepsilon RM.$$

Utilisons maintenant l'hypothèse faite sur ε d'être "essentiellement de niveau 0" ; elle nous permet d'écrire que $\varepsilon \in RM^\dagger e_{M\cap {}^wU^\dagger} RM^\dagger$, où on a posé ${}^w? := w?w^{-1}$. On en déduit

$$X(u) \in RM.\varepsilon e_{U^\dagger} e_{M\cap {}^wU^\dagger} e_{\overline{U}} n_w.RG^\dagger.e_{\overline{U}}\varepsilon RM.$$

On décompose maintenant le premier $e_{\overline{U}}$ en un produit $e_{\overline{U}\cap {}^wU} e_{\overline{U}\cap {}^wM} e_{\overline{U}\cap {}^w\overline{U}}$ grâce au point iv) de 5.9. En remarquant que $e_{\overline{U}\cap {}^w\overline{U}} n_w.RG^\dagger.e_{\overline{U}} \subseteq n_w.RG^\dagger.e_{\overline{U}}$, on obtient

$$X(u) \in RM.\varepsilon e_{U^\dagger} e_{M\cap {}^wU^\dagger} e_{\overline{U}\cap {}^wU} e_{\overline{U}\cap {}^wM} n_w.RG^\dagger.e_{\overline{U}}\varepsilon RM.$$

Observons que le produit $e_{U\cap {}^wU^\dagger} e_{M\cap {}^wU^\dagger} e_{\overline{U}\cap {}^wU}$ est l'idempotent associé au pro-p-groupe ${}^wU^\dagger({}^wU\cap \overline{U})$ et s'écrit encore $e_{{}^wU^\dagger} e_{\overline{U}\cap {}^wU} = e_{\overline{U}\cap {}^wU} e_{{}^wU^\dagger}$. Ainsi, en décomposant $e_{U^\dagger} = e_{U^\dagger\cap {}^w\overline{U}} e_{U^\dagger\cap {}^wM} e_{U^\dagger\cap {}^wU}$, puis en commutant à n_w, on obtient en posant $?^w := w^{-1}?w = {}^{w^{-1}}?$

$$\begin{array}{rcl}
X(u) & \in & (RM.\varepsilon e_{U^\dagger\cap {}^w\overline{U}}\, n_w)\, e_{M\cap U^{\dagger w}} (e_{U\cap \overline{U}^w}\, e_{U^\dagger}) e_{M\cap \overline{U}^w}.RG^\dagger.e_{\overline{U}}\varepsilon RM \\
 & \subset & RG.e_{M\cap U^{\dagger w}} e_{U\cap \overline{U}^w} e_{M\cap \overline{U}^w} e_{U^\dagger}.RG^\dagger.e_{\overline{U}}\varepsilon RM \\
 & = & RG.e_{M\cap U^{\dagger w}} e_{U\cap \overline{U}^w} e_{M\cap \overline{U}^w} e_{U^\dagger} e_{\overline{U}}\varepsilon RM \\
 & = & RG.e_{M\cap U^{\dagger w}} e_{U\cap \overline{U}^w} e_{U^\dagger} e_{\overline{U}} e_{M\cap \overline{U}^w}.\varepsilon RM \\
 & = & RG.e_{U\cap \overline{U}^w} (e_{U^\dagger} e_{M\cap U^{\dagger w}})(e_{\overline{U}} e_{M\cap \overline{U}^w}).\varepsilon RM \qquad (*)
\end{array}$$

Dans la deuxième ligne, on fait commuter $e_{M\cap \overline{U}^w}$ et $e_{U^\dagger}$ car M normalise $U^\dagger$. À la troisième ligne, on utilise la décomposition à la Iwahori $G^\dagger = U^\dagger M^\dagger \overline{U}^\dagger$ pour écrire $e_{U^\dagger}.RG^\dagger.e_{\overline{U}} = e_{U^\dagger} e_{\overline{U}}.RM^\dagger$. La quatrième ligne vient encore du fait que M normalise $U^\dagger$ et $\overline{U}$, et la dernière vient du fait que $M^\dagger$ normalise le groupe $U^\dagger(U\cap \overline{U}^w)$ puisqu'il normalise U, $U^\dagger$ et agit trivialement sur le quotient.

Deux cas se présentent maintenant : supposons tout d'abord que $\mathcal{M}\cap \mathcal{P}^w$ soit un parabolique propre de $\mathcal{M}$ et posons $\mathcal{P}' := (\mathcal{M}\cap \mathcal{P}^w)\mathcal{U}$. C'est un sous-groupe parabolique de $\mathcal{G}$ qui contient strictement $\mathcal{P}$. Son radical unipotent est $(\mathcal{M}\cap \mathcal{U}^w)\mathcal{U}$, sa composante de Levi semi-standard est $\mathcal{L} := \mathcal{M}\cap \mathcal{M}^w$, et son opposé semi-standard est $\overline{\mathcal{P}}' := (\mathcal{M}\cap \overline{\mathcal{P}}^w)\overline{\mathcal{U}}$. Par ailleurs, si $\mathcal{M} = \mathcal{Z}_{\mathcal{G}}(\mathcal{T})$ pour un sous-tore de $\mathcal{S}$, on a $\mathcal{L} = \mathcal{Z}_{\mathcal{G}}(\mathcal{T}.\mathcal{T}^w)$ et $\mathcal{P}'$ est donc $\underline{\mathcal{G}}$-admissible. La décomposition d'Iwahori $M^\dagger = (M^\dagger\cap U^w)L^\dagger(M^\dagger\cap \overline{U}^w)$ nous fournit une unique distribution ε_L dans $RL^\dagger$ telle que $e_{M^\dagger\cap U^w}\varepsilon e_{M^\dagger\cap \overline{U}^w} = e_{M^\dagger\cap U^w}\varepsilon_L e_{M^\dagger\cap \overline{U}^w}$. Par unicité et par la proposition 2.2, ε_L est un idempotent central de $RL^\dagger$. Pour vérifier que ε_L est essentiellement de niveau 0, fixons un parabolique $\underline{\mathcal{G}}$-admissible minimal $\mathcal{R}$ de $\mathcal{G}$ et contenant $\mathcal{P}'$. Par la définition 5.2, on a $\varepsilon \in RM^\dagger e_{M^\dagger\cap \overline{V}} e_{M^\dagger\cap V} RM^\dagger$. On en déduit

$$\begin{array}{rcl}
e_{M^\dagger\cap U^w}\varepsilon e_{M^\dagger\cap \overline{U}^w} & \in & e_{M^\dagger\cap U^w} RM^\dagger e_{M^\dagger\cap \overline{V}} e_{M^\dagger\cap V} RM^\dagger e_{M^\dagger\cap \overline{U}^w} \\
 & = & e_{M^\dagger\cap U^w} RL^\dagger e_{M^\dagger\cap \overline{U}^w} e_{L^\dagger\cap \overline{V}} e_{L^\dagger\cap V} e_{M^\dagger\cap U^w} RL^\dagger e_{M^\dagger\cap \overline{U}^w} \\
 & = & e_{M^\dagger\cap U^w} RL^\dagger e_{L^\dagger\cap \overline{V}} e_{L^\dagger\cap V} RL^\dagger e_{M^\dagger\cap \overline{U}^w}
\end{array}$$

On a utilisé la décomposition $M^\dagger = (M^\dagger\cap U^w)L^\dagger(M^\dagger\cap \overline{U}^w)$ pour changer M en L dans la seconde ligne, et on a appliqué 2.2 à cette même décomposition pour passer à la troisième ligne. Par unicité, il s'ensuit que ε_L est essentiellement de niveau 0 dans RL. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à $\mathcal{P}'$ et ε_L. On obtient, à partir de la ligne $(*)$

$$\begin{array}{rcl}
X(u) & \in & RG.(e_U e_{M\cap U^w})(e_{\overline{U}} e_{M\cap \underline{U}^w}).\varepsilon RM \\
 & \subset & RGe_U e_{\overline{U}}\varepsilon
\end{array}$$

toujours en utilisant le fait que M normalise U et $\overline{U}$.

Supposons au contraire que $\mathcal{M} \cap \mathcal{P}^w = \mathcal{M}$, ou de manière équivalente, que $\mathcal{M} = w^{-1}\mathcal{M}w$. C'est ici qu'intervient l'hypothèse de corang résiduel 1. En effet, w^{-1} normalise aussi ${}^q\underline{\mathcal{M}}_k$ qui sous cette hypothèse est un Levi maximal (et propre) de ${}^q\underline{\mathcal{G}}_k$. Il s'ensuit que le groupe de Weyl $W(\underline{\mathcal{S}}_k, \underline{\mathcal{M}}_k)$ est normal et d'indice 2 dans le groupe de Weyl $W(\underline{\mathcal{S}}_k, \underline{\mathcal{G}}_k)$, et puisque w n'est pas dans $W(\underline{\mathcal{S}}_k, \underline{\mathcal{M}}_k)$, son action par conjugaison échange le radical unipotent de $\widetilde{\mathcal{P}}_k$ et celui de $\widetilde{\overline{\mathcal{P}}}_k$. Par conséquent, la conjugaison par n_w induit un isomorphisme $\mathcal{G}_{\mathcal{P}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_{\overline{\mathcal{P}}}$, induisant à son tour un isomorphisme $\mathcal{G}^\dagger_{\mathcal{P}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}^\dagger_{\overline{\mathcal{P}}}$ qui sur les point entiers signifie simplement que $w^{-1}G^\dagger\overline{U}w = G^\dagger U$. On en tire immédiatement que $U = U^\dagger(U \cap \overline{U}^w)$, et la ligne $(*)$ ci-dessus nous donne

$$X(u) \in RG.e_U e_{\overline{U}}\varepsilon.$$

On a donc terminé la preuve de 5.17 et par là celle du théorème 5.4.

5.18 *Preuve du corollaire 5.6 :* Comme dans la preuve précédente, nous allégeons les notations en ne soulignant pas les groupes de points entiers. D'après la proposition 2.2 appliquée à la décomposition d'Iwahori $G^\dagger_{\overline{\mathcal{P}}} = U^\dagger M^\dagger \overline{U}$, on a $e_{U^\dagger}e_{\overline{U}} \in RGe_{\overline{U}}e_{U^\dagger}e_{\overline{U}}$. Ainsi, grâce à l'hypothèse i),

$$e_{U^\dagger}e_{\overline{U}}\varepsilon' \in RGe_{\overline{U}}e_{U^\dagger}e_{\overline{U}}\varepsilon' = RGe_{\overline{U}}\widetilde{\varepsilon}'e_{U^\dagger}\widetilde{\varepsilon}'e_{\overline{U}}.$$

D'après notre hypothèse sur l'entrelacement de $\widetilde{\varepsilon}'$ et notre hypothèse $U^\dagger \cap U' \subseteq U'^\dagger$, on a donc

$$e_{U^\dagger}e_{\overline{U}}\varepsilon' \in RG\widetilde{\varepsilon}'e_{U'^\dagger}\widetilde{\varepsilon}'e_{\overline{U}} = RG\widetilde{\varepsilon}'e_{U'^\dagger}e_{\overline{U}'}\varepsilon'e_{\overline{U}}.$$

D'après le théorème 5.4 appliqué à $\underline{\mathcal{G}}'$ et ε', on obtient

$$e_{U^\dagger}e_{\overline{U}}\varepsilon' \in RG\widetilde{\varepsilon}'\, RG'\, e_{U'}e_{\overline{U}'}\varepsilon'e_{\overline{U}} = RG\widetilde{\varepsilon}'\, RG'\, e_{U'}\widetilde{\varepsilon}'e_{\overline{U}} = RG\widetilde{\varepsilon}'e_{U'}\widetilde{\varepsilon}'e_{\overline{U}}.$$

Or, par notre hypothèse sur l'entrelacement, on a $\widetilde{\varepsilon}'e_{U'}u\,\widetilde{\varepsilon}' = 0$ pour tout $u \in U \setminus U'$, et donc $\widetilde{\varepsilon}'e_{U'}\widetilde{\varepsilon}' = [U : U']^{-1}\widetilde{\varepsilon}'e_U\widetilde{\varepsilon}'$. On en déduit que

$$e_{U^\dagger}e_{\overline{U}}\varepsilon' \in RGe_U\widetilde{\varepsilon}'e_{\overline{U}} = RGe_Ue_{\overline{U}}\varepsilon'.$$

5.19 *Preuve de 5.3 :* Comme dans les preuves précédentes, nous allégeons les notations en ne soulignant pas les groupes de points entiers. Pour un caractère $\chi : U^\dagger/U^* \longrightarrow R^\times$, on note $[\chi]$ l'idempotent de $RU^\dagger$ associé. L'hypothèse ii) implique que R est suffisamment gros pour que $\sum_\chi [\chi] = e_{U^*}$, la somme étant sur tous les caractères χ. On a donc l'égalité dans $RG^\dagger$

$$[\theta] = \sum_\chi [\chi][\theta].$$

Fixons maintenant un tel χ ainsi qu'un élément $u \in \overline{U}^\dagger$ et calculons l'expression $[\chi]u[\chi][\theta]$. On a

$$\begin{aligned}
|U^\dagger/U^*|.[\chi]u[\chi][\theta] &= \sum_{v \in U^\dagger/U^*} \chi^{-1}(v)e_{U^*}vu[\chi][\theta] \\
&= \sum_v \chi^{-1}(v)e_{U^*}vuv^{-1}\chi(v)[\chi][\theta] \\
&= e_{U^*}u\sum_v [u^{-1}, v][\chi][\theta] = e_{U^*}u\sum_v \theta([u^{-1}, v])[\chi][\theta]
\end{aligned}$$

D'après le ii) de notre hypothèse, la somme $\sum_v \theta([u^{-1}, v])$ est non-nulle seulement si $u \in \overline{U}^*$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
|\overline{U}^\dagger/\overline{U}^*|[\chi]e_{\overline{U}^\dagger}[\chi][\theta] &= \sum_{u \in \overline{U}^\dagger/\overline{U}^*} [\chi]e_{\overline{U}^*}u[\chi][\theta] \\
&= [\chi]e_{\overline{U}^*}[\chi][\theta] = [\chi][\theta]
\end{aligned}$$

et donc que

$$\begin{aligned}[\theta] &= \sum_{\chi}[\chi][\theta] = |\overline{U}^{\dagger}/\overline{U}^{*}|\sum_{\chi}[\chi]e_{\overline{U}^{\dagger}}[\chi][\theta] \\ &\in RG^{\dagger}e_{\overline{U}^{\dagger}}RG^{\dagger}\end{aligned}$$

De même on prouve que $[\theta] \in RG^{\dagger}e_{U^{\dagger}}RG^{\dagger}$ et par produit et décomposition d'Iwahori, on en déduit que $[\theta]$ vérifie le point ii) de la définition 5.2.

5.20 *Preuve de 5.5 :* La première étape consiste à dévisser au cas où φ est une dilatation. Notons pour cela que, en tant que quotient de $\underline{\mathcal{G}}'_k$, le groupe image $im(\varphi_k)$ est réduit, donc lisse. Soit $\underline{\mathcal{G}}^1 \xrightarrow{\nu^1} \underline{\mathcal{G}}$ la dilatation de $im(\varphi_k)$. On sait que $\underline{\mathcal{G}}^1$ est lisse et, par la propriété universelle des dilatations sur les $\mathcal{O}_K$-schémas plats, que φ se factorise en $\nu^1 \circ \varphi^1$ où $\varphi^1 : \underline{\mathcal{G}}' \longrightarrow \underline{\mathcal{G}}^1$ induit un isomorphisme des fibres génériques. Itérons le procédé : on obtient une suite de dilatations $\underline{\mathcal{G}}^n \xrightarrow{\nu^n} \underline{\mathcal{G}}^{n-1}$ et une suite de factorisations $\varphi^{n-1} = \nu^n \circ \varphi^n$. Notons que si ν^n n'est pas un isomorphisme, alors l'indice de $\underline{G}^n$ dans $\underline{G}^{n-1}$ est un entier > 1. Comme l'indice de $\underline{G}'$ dans $\underline{G}$ est fini, il existe un entier n à partir duquel la suite devient stationnaire. On a alors $\underline{G}' = \underline{G}^n$, et par unicité des modèles lisses [9, 1.7], φ^n est un isomorphisme. On a donc présenté φ comme une composition de dilatations de $\underline{\mathcal{G}}$ à centres lisses. En particulier $ker(\varphi_k)$ a une suite de composition dont les sous-quotients sont les $ker(\nu^n)$.

On est donc ramené au cas où φ_k est une dilatation (la dilatation de centre $im(\varphi_k)$). Dans ce cas le noyau est même vectoriel ; en effet, revenant à la définition originale d'une dilatation comme ouvert de l'éclatement du centre, on peut identifier $\underline{\mathcal{G}}'_k$ comme l'extension vectorielle de $im(\varphi_k)$ associée au fibré conormal de $im(\varphi_k)$ dans $\underline{\mathcal{G}}_k$.

6 Paraboliques minimaux, niveau zéro

Nous reprenons maintenant les notations du paragraphe 2.10. En particulier si $x \in B(\mathcal{G}, K)$, on note $\mathcal{G}_x$ le modèle lisse de $\mathcal{G}$ associé à x par Bruhat-Tits, et $\mathcal{G}_x^{\circ}$ sa composante neutre. Commençons par la remarque suivante :

Remarque 6.1 *Soit $x \in B(\mathcal{G}, K)$ et $\mathcal{M}$ un Levi de $\mathcal{G}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $x \in B(\mathcal{M}, K)$

ii) L'adhérence schématique dans $\mathcal{G}_x$ du tore déployé maximal du centre de $\mathcal{M}$ est un tore.

iii) $\mathcal{M}$ est $\mathcal{G}_x^{\circ}$-admissible au sens de 5.1.

Preuve : Supposons $x \in B(\mathcal{M}, K)$, et soit $\mathcal{S}$ un tore déployé maximal de $\mathcal{M}$ dont l'appartement associé contient x. Par construction, le groupe de Bruhat-Tits $\mathcal{G}_x$ contient le prolongement canonique de $\mathcal{S}$ à $\mathcal{O}_K$. Comme $\mathcal{S}$ contient la partie déployée du centre de $\mathcal{M}$, on en déduit $i) \Rightarrow ii)$. L'implication $ii) \Rightarrow iii)$ est tautologique, vue la définition d'admissibilité. Prouvons donc $iii) \Rightarrow i)$. Supposons que $\mathcal{M}$ est $\mathcal{G}_x^{\circ}$-admissible et choisissons un tore déployé $\mathcal{T}$ de $\mathcal{M}$ se prolongeant en un sous-tore $\mathcal{T}_x$ de $\mathcal{G}_x$ et dont le centralisateur dans $\mathcal{G}$ est $\mathcal{M}$. Choisissons alors un tore déployé maximal $\mathcal{S}_x$ de $\mathcal{G}_x$ contenant $\mathcal{T}_x$. (Pour ce faire, on choisit d'abord $S_{x,k}$ dans $\mathcal{G}_{x,k}$ contenant $\mathcal{T}_{x,k}$, on relève $\mathcal{S}_{x,k}$ en un tore $\mathcal{S}'_x$ par [14, Exp IX. Thm 3.6], puis $\mathcal{T}_{x,k}$ en $\mathcal{T}'_x \subset \mathcal{S}'_x$, puis on utilise l'unicité à conjugaison près des relèvements de $\mathcal{T}_{x,k}$ pour conjuguer $\mathcal{S}'_x$ en un tore contenant $\mathcal{T}_x$). Alors la fibre générique $\mathcal{S}$ de $\mathcal{S}_x$ est un tore déployé maximal de $\mathcal{G}$ contenu dans le centralisateur de $\mathcal{T}$, c'est à dire $\mathcal{M}$. Par définition x appartient à l'appartement associé à $\mathcal{S}$ et par conséquent à $B(\mathcal{M}, K)$. $\square$

Proposition 6.2 *Soit $\mathcal{P} = \mathcal{M}\mathcal{U}$ un sous-groupe parabolique de $\mathcal{G}$ et x un point de l'immeuble $B(\mathcal{M}, K)$.*

i) (niveau zéro) $e_{U_x^+}e_{\overline{U}_x}e_{M_x^+} \in (RG_x)e_{U_x}e_{\overline{U}_x}e_{M_x^+}$.

ii) Si $\mathcal{P}$ est minimal, alors $e_{U_x^+}e_{\overline{U}_x} \in (RG_x)e_{U_x}e_{\overline{U}_x}$.

Preuve : Remarquons pour commencer que les groupes $\mathcal{U}_x$ et $\overline{\mathcal{U}}_x$ obtenus par adhérence schématique de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{G}_x$ sont *connexes* donc contenus dans $\mathcal{G}_x^\circ$. Pour le voir, on peut se ramener aux adhérences de groupes radiciels $\mathcal{U}_{\alpha,x}$, lesquelles sont explicitées par Bruhat-Tits (construction en [9, 4.3 et 5.2.2] et propriété d'immersion fermée de [9, 3.8.1 (S2)]) qui montrent que leurs schémas sous-jacents sont des vectoriels sur $\mathcal{O}_K$. Comme $G_x^+ = (\mathcal{G}_x^\circ)^\dagger(\mathcal{O}_K)$, on voit que tous les idempotents de l'énoncé sont en réalité dans G_x°.

Dans le point i), l'idempotent $e_{M_x^+}$ est clairement "essentiellement de niveau zéro" au sens de 5.2, donc on peut appliquer le théorème 5.4. Dans le point ii), on remarque que l'idempotent $1_{M_x^+}$ (élément unité) satisfait aussi les hypothèses de 5.2 puisque $\mathcal{M}$ n'a pas de parabolique $\mathcal{M}_x^\circ$-admissible propre. $\square$

En combinant ce corollaire avec 3.5, on obtient bien la propriété de commutation 1.4 annoncée dans l'introduction pour les paraboliques minimaux, et par 3.7, la propriété de seconde adjonction dans ce cas.

En ce qui concerne le niveau zéro, voici le résultat obtenu :

Proposition 6.3 *Soit $\mathrm{Mod}_R(G)_0$ la sous-catégorie pleine des objets engendrés par la réunion de leurs G_x^+-invariants, pour $x \in B(\mathcal{G}, K)$ (objets de "niveau zéro"), et $\mathrm{Mod}_R(G)_{>0}$ celle des objets dont tous les G_x^+-invariants sont nuls, pour $x \in B(\mathcal{G}, K)$ (objets de "niveau positif").*

i) On a une décomposition $\mathrm{Mod}_R(G) = \mathrm{Mod}_R(G)_0 \oplus \mathrm{Mod}_R(G)_{>0}$.

ii) Les foncteurs paraboliques envoient objets de niveau zéro, resp. positif, sur objets de niveau zéro, resp. positif.

iii) Pour tout sous-groupe parabolique $\mathcal{P}$ de $\mathcal{G}$, la restriction du foncteur $r_{G,P}^M$ à la catégorie $\mathrm{Mod}_R(G)_0$ est adjointe à droite de la restriction du foncteur $\delta_P i_{M,\overline{P}}^G$ à la catégorie $\mathrm{Mod}_R(M)_0$.

iv) La catégorie $\mathrm{Mod}_R(G)_0$ est noethérienne.

Preuve : La décomposition du point i) est expliquée dans l'appendice. Pour le point ii), soit $\mathcal{P} = \mathcal{M}\mathcal{U}$ un sous-groupe parabolique. D'après le corollaire précédent et 3.5, on a $i_{M,P}^G(ind_{M_x^+}^M(R)) \simeq ind_{G_x^+}^{G_x}(R)$ pour tout $x \in B(\mathcal{M}, K)$. Par exactitude de $i_{M,P}^G$, on en déduit que celui-ci envoie $Mod_R(M)_0$ dans $Mod_R(G)_0$. Par fidélité, et puisque toute G-orbite dans $B(\mathcal{G}, K)$ rencontre $B(\mathcal{M}, K)$, on en déduit qu'il envoie aussi $Mod_R(M)_{>0}$ dans $Mod_R(G)_{>0}$. Par réciprocité de Frobenius, on en déduit les propriétés analogues pour $r_{G,P}^M$.

Pour le point iii), on recopie la preuve de 3.7 en utilisant le fait que les $e_{M_x^+}$ pour $x \in B(\mathcal{M}, K)$ forment une famille génératrice de $Mod_R(M)_0$ d'idempotents P-bons. Enfin, les arguments de la partie 4 montrent que iii) implique iv). $\square$

7 GL(N)

Pour coller aux notations de Bushnell, Kutzko et Stevens, nous noterons F le corps local que nous notions K jusqu'ici.

7.1 *Dictionnaire Bruhat-Tits/Bushnell-Kutzko :* Ce dictionnaire est très bien expliqué dans [6] auquel on renvoie le lecteur pour les détails. Soit V un F-espace vectoriel. Une fonction réseau sur V relativement à F est une fonction $\Lambda : \mathbb{R} \longrightarrow \{\mathcal{O}_F - \text{réseaux de } V\}$ qui est décroissante, continue à gauche, et telle que $\Lambda(r + v_F) = \mathfrak{P}_F\Lambda(r)$ pour tout $r \in \mathbb{R}$, où $v_F \in \mathbb{R}_+$ désigne la valuation d'une uniformisante de F. L'ensemble $\mathcal{FR}_F(V)$ de ces fonctions est muni d'une action de G et d'une action de $\mathbb{R}$ par translations que nous noterons $\Lambda \mapsto \Lambda[t] : r \mapsto \Lambda(r - t)$. Soit $\mathcal{G}$ le F-schéma en groupes des automorphismes F-linéaires de V, dont le groupe des points rationnels est $G = Aut_F(V)$. D'après [6, Prop. 2.4], il y a une application naturelle $B(\mathcal{G}, F) \longrightarrow \mathcal{FR}_F(V)$. Celle-ci est bijective, G-équivariante, et $\mathbb{R}$-équivariante si on identifie $X_*(\mathcal{Z}(\mathcal{G})) \otimes \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ en envoyant un endomorphisme scalaire de V sur l'opposé de la valuation de ce scalaire.

Notons $A := End_F(V)$. La fonction réseau $\Lambda \in \mathcal{FR}_F(V)$ détermine une fonction réseau $\mathfrak{a}(\Lambda) \in \mathcal{FR}_F(A)$ définie par $\mathfrak{a}_r(\Lambda) = \{x \in A, \forall u \in \mathbb{R}, x\Lambda(u) \subseteq \Lambda(r + u)\}$ pour $r \in \mathbb{R}$. On note aussi

$\mathfrak{a}_{r+}(\Lambda) := \bigcup_{s>r} \mathfrak{a}_s(\Lambda)$. Alors $\mathfrak{a}_0(\Lambda)$ est un ordre héréditaire, $\mathfrak{a}_{0+}(\Lambda)$ est son radical de Jacobson et tous les $\mathfrak{a}_r(\Lambda)$ en sont des idéaux fractionnaires. Posons aussi $\mathfrak{u}_0(\Lambda) := \mathfrak{a}_0(\Lambda)^\times$, c'est un sous-groupe compact ouvert de $GL(V)$ dont la famille $\mathfrak{u}_r(\Lambda) := 1 + \mathfrak{a}_r(\Lambda)$ pour $r > 0$ est une filtration par des pro-p-sous-groupes ouverts normaux. Si $x \in B(\mathcal{G}, F)$ est le point correspondant à Λ, on a $\mathfrak{u}_0(\Lambda) = G_x$ et $\mathfrak{u}_{0+}(\Lambda) = G_x^+$, et d'après [6, Appendice A], la filtration $G_{x,r} := \mathfrak{u}_r(\Lambda)$, $r \geqslant 0$ est celle de Moy et Prasad.

Si $\mathcal{M} \subset \mathcal{G}$ est le sous-groupe de Levi correspondant à une décomposition $V = \bigoplus_{i\in I} V_i$, le "sous-immeuble" $B(\mathcal{M}, F)$ de $B(\mathcal{G}, F)$ s'identifie au sous-ensemble des fonctions réseaux décomposées par M au sens où $\forall r \in \mathbb{R}, \Lambda(r) = \bigoplus_{i\in I} \Lambda(r) \cap V_i$. Soit x le point de $B(\mathcal{M}, F)$ associé à une telle fonction réseau, alors l'ensemble $x + a_M$ est l'ensemble des fonctions réseau de la forme $\bigoplus \Lambda_i[t_i]$ où les t_i sont des réels.

Nous dirons que Λ est rationnelle si ses sauts sont dans $\mathbb{Q}v_F \subset \mathbb{R}$. Il existe alors un plus petit entier positif $e = e(\Lambda)$ tel que la fonction $\widetilde{\Lambda} : r \mapsto \Lambda(er/v_F)$ soit une suite de réseaux au sens de Bushnell-Kutzko [12, 2.1] La période de $\widetilde{\Lambda}$ est justement $e(\Lambda)$. Réciproquement, une suite de réseaux détermine une unique fonction réseau ; il suffit de rendre la période égale à v_F.

7.2 *Strates et caractères semi-simples* : Soit V un F-vectoriel et $A = End_F(V)$. Une strate dans V est un quadruplet $[\Lambda, n, r, \gamma]$ où Λ est une fonction réseau, $\gamma \in \mathfrak{a}_{-n}(\Lambda)$ et $r < n$. On définit l'équivalence de telles strates comme dans le cas des suites de réseaux considéré par Bushnell et Kutzko. D'ailleurs, lorsque Λ est rationnelle et $n \in \frac{v_F}{e(\Lambda)}\mathbb{N}$, seul cas que l'on considèrera ici, le quadruplet $[\widetilde{\Lambda}, \frac{e(\Lambda)}{v_F}n, \frac{e(\Lambda)}{v_F}r, \gamma]$ est une honnête strate au sens de [11, 3.1]. On dira alors que $[\Lambda, n, r, \gamma]$ est fondamentale, simple, semi-simple si $[\widetilde{\Lambda}, \frac{e(\Lambda)}{v_F}n, \frac{e(\Lambda)}{v_F}r, \gamma]$ l'est.

À toute strate $[\Lambda, n, 0, \beta]$ simple, resp. semi-simple, Bushnell et Kutzko [12, 5], resp Stevens [20, 3], associent deux sous-ordres $\mathfrak{j}(\Lambda, \beta) \supseteq \mathfrak{h}(\Lambda, \beta)$ de $\mathfrak{a}_0(\Lambda)$, et un ensemble de caractères dits *simples*, resp. *semi-simples*, du sous-groupe $H^+(\Lambda, \beta) := \mathfrak{h}(\Lambda, \beta) \cap \mathfrak{u}_{0+}(\Lambda)$ de $J(\Lambda, \beta) := \mathfrak{j}(\Lambda, \beta) \cap \mathfrak{u}_0(\Lambda)$.

Comme le groupe $H^+(\Lambda, \beta)$ est pro-p, les caractères (semi-)simples sont à valeurs dans l'anneau $\mathbb{Z}_{p-cycl}$ des entiers de l'extension p^∞-cyclotomique de $\mathbb{Q}$. Rappelons aussi que leur définition dépend du choix d'un caractère $\psi : F/\mathfrak{P}_F \longrightarrow \mathbb{Z}_{p-cycl}^\times$.

Proposition 7.3 *Soit $[\Lambda, n, 0, \beta]$ une strate semi-simple et $\mathcal{P} = \mathcal{M}\mathcal{U}$ un sous-groupe parabolique de $\mathcal{G} = \mathcal{GL}(V)$ tel que M contienne le tore $F[\beta]^\times$ et $B(\mathcal{M}, F)$ contienne le point x de $B(\mathcal{G}, F)$ associé à Λ. Soit $\theta \in \mathcal{C}(\Lambda, 0, \beta)$, θ_M sa restriction à $H^+(\Lambda, \beta) \cap M$ et ε_{θ_M} l'idempotent de RM_x associé, où $R = \mathbb{Z}_{p-cycl}[\frac{1}{p}]$. On a*

$$e_{U_x^+} e_{\overline{U}_x} \varepsilon_{\theta_M} \in RG_x e_{U_x} e_{\overline{U}_x} \varepsilon_{\theta_M}.$$

Partons maintenant d'un sous-groupe parabolique $\mathcal{P} = \mathcal{M}\mathcal{U}$ dans $\mathcal{G}$ et notons $V = \bigoplus_{i\in I} V_i$ la décomposition de V associée au sous-groupe de Levi $\mathcal{M}$. Donnons-nous pour chaque i une strate semi-simple $[\Lambda_i, n_i, 0, \beta_i]$ dans $End_F(V_i)$ et un caractère semi-simple $\theta_i \in \mathcal{C}(\Lambda_i, 0, \beta_i)$. La collection des Λ_i correspond à un point de $B(\mathcal{M}, F)$ et la collection des caractères simples nous fournit un idempotent $\varepsilon \in RM_x$ que nous qualifierons de *semi-simple*.

Proposition 7.4 *Soit $\Lambda := \bigoplus_{i\in I} \Lambda_i$. Il existe une strate semisimple $[\Lambda, n, 0, \beta]$ avec $F[\beta]^\times \subset M$ et un caractère semi-simple $\theta \in \mathcal{C}(\Lambda, 0, \beta)$ tel que $\varepsilon_{\theta_M} = \varepsilon$.*

En appliquant ce résultat aux collections translatées $\Lambda_i[t_i]$, avec $t_i \in \mathbb{Q}$, on en déduit que l'idempotent ε est P-bon au sens de 3.6.

Proposition 7.5 *(Stevens, Bushnell-Kutzko) La famille des idempotents semi-simples engendre la catégorie $\mathrm{Mod}_R(M)$, où $R = \mathbb{Z}_{p-cycl}[\frac{1}{p}]$.*

Avant de prouver ces trois propositions, expliquons comment descendre ces résultats à $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$. Remarquons que le groupe $\Gamma_p := Gal(\mathbb{Q}_{p-cycl}|\mathbb{Q})$ agit sur les caractères $\psi : F/\mathfrak{P}_F \longrightarrow \mathbb{Z}_{p-cycl}^\times$. Soit $[\Lambda, n, 0, \beta]$ une strate semi-simple, on peut donc avec des notations évidentes considérer les ensembles

$$\overline{\mathcal{C}}(\Lambda, 0, \beta) := \bigcup_{\gamma\in\Gamma_p} \mathcal{C}_{\psi^\gamma}(\Lambda, 0, \beta).$$

Alors la somme

$$\varepsilon_{\Lambda,\beta} := \sum_{\theta\in\overline{\mathcal{C}}(\Lambda,0,\beta)} \varepsilon_\theta$$

est un idempotent de $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]G_x$ (où x correspond à Λ). La proposition 7.5 implique que la famille des idempotents de la forme $\times_{i\in I}\varepsilon_{\Lambda_i,\beta_i} \in \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]M_x$ engendre $Mod_{\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]}(M)$, et les propositions 7.3 et 7.4 assurent que ces idempotents sont P-bons au sens de 3.6.

7.6 *Preuve de la proposition 7.3 :* Nous voulons appliquer les énoncés "généraux" 5.3 et 5.6. Notons pour cela $A(\beta) := End_{F[\beta]}(V) \subset A = End_F(V)$, et $\mathfrak{a}_r(\Lambda,\beta) := A(\beta)\cap\mathfrak{a}_r(\Lambda)$ pour $r\in\mathbb{R}$. On sait alors que $\mathfrak{a}_0(\Lambda,\beta)$ est un $\mathcal{O}_F$-ordre héréditaire dans la F-algèbre semi-simple $A(\beta)$ et que $\mathfrak{a}_{0+}(\Lambda,\beta)$ est son radical de Jacobson. De même notons $\mathfrak{j}_r(\Lambda,\beta) := \mathfrak{j}(\Lambda,\beta)\cap\mathfrak{a}_r(\Lambda)$. On sait que $\mathfrak{j}_{0+}(\Lambda,\beta)$ est le radical de Jacobson de $\mathfrak{j}(\Lambda,\beta)$ et on a par définition l'égalité $\mathfrak{j}(\Lambda,\beta) = \mathfrak{j}_{0+}(\Lambda,\beta)+\mathfrak{a}_0(\Lambda,\beta)$.

Lorsqu'on a une $\mathcal{O}_F$-algèbre finie et plate B, le foncteur sur les $\mathcal{O}_F$-algèbres qui à R associe $(B\otimes R)^\times$ est représentable par un schéma en groupes affine lisse sur $\mathcal{O}_F$ (un ouvert d'un espace affine sur $\mathcal{O}_F$). Nous noterons $\mathcal{G}_x$, resp. $\mathcal{G}_{\beta,x}$, le schéma en groupes associé à $\mathfrak{a}_0(\Lambda)$, resp. $\mathfrak{a}_0(\Lambda,\beta)$ et $\mathcal{J}$ celui associé à $\mathfrak{j}(\Lambda,\beta)$. Les relations de contenance de ces ordres induisent d'une part un morphisme $\varphi:\mathcal{J}\longrightarrow\mathcal{G}_x$ qui sur la fibre générique induit l'identité de $\mathcal{GL}(V)$ et d'autre part une immersion fermée $\psi:\mathcal{G}_{\beta,x}\longrightarrow\mathcal{J}$. Puisque $\mathfrak{a}_{0+}(\Lambda)\cap\mathfrak{j}(\Lambda,\beta)$ est le radical de Jacobson de $\mathfrak{j}(\Lambda,\beta)$, on a $\varphi_k^{-1}({}^u\mathcal{G}_{x,k}) = {}^u\mathcal{J}_k$ ou, de manière équivalente, $\mathcal{J}^\dagger(\mathcal{O}_F) = J^+(\Lambda,\beta) := G_x^+\cap J(\Lambda,\beta)$. Puisque $\mathfrak{j}(\Lambda,\beta) = \mathfrak{j}_{0+}(\Lambda,\beta)+\mathfrak{a}_0(\Lambda,\beta)$, la fibre spéciale de ψ induit un isomorphisme des quotients réductifs ${}^q\mathcal{J}_{k_F}\xrightarrow{\sim}{}^q\mathcal{G}_{\beta,x,k_F}$. Notons que, par la définition d'une strate semi-simple, la fonction-réseau Λ définit un point x_β de l'immeuble $B(\mathcal{G}_\beta,x)$ associé au groupe réductif $\mathcal{G}_\beta$ des inversibles de la F-algèbre $A(\beta)$ (le centralisateur de β). Le groupe $\mathcal{G}_{\beta,x}$ s'identifie au groupe parahorique de $\mathcal{G}_\beta$ associé à x_β. En particulier, comme $\mathcal{G}_\beta$ est un groupe linéaire, $\mathcal{G}_{\beta,x}$ est connexe (ainsi que $\mathcal{G}_x$), et par conséquent $\mathcal{J}$ l'est aussi.

Maintenant l'hypothèse $M\supset F[\beta]^\times$ implique que le centre $\mathcal{Z}(\mathcal{M})$ de $\mathcal{M}$ est inclus dans $\mathcal{G}_\beta$, et par conséquent l'intersection $\mathcal{M}_\beta := \mathcal{M}\cap\mathcal{G}_\beta = \mathcal{Z}_{\mathcal{G}_\beta}(\mathcal{Z}(\mathcal{M}))$ est un sous-groupe de Levi de $\mathcal{G}_\beta$. L'hypothèse $x\in B(\mathcal{M},F)$ implique que $x_\beta\in B(\mathcal{M}_\beta,F)$ et par la remarque 6.1, que l'adhérence schématique de $\mathcal{Z}(\mathcal{M})$ dans $\mathcal{G}_{\beta,x}$ est un tore. Il en est donc de même de l'adhérence schématique de $\mathcal{Z}(\mathcal{M})$ dans $\mathcal{J}$, autrement dit $\mathcal{M}$ est $\mathcal{J}$-admissible au sens de 5.1.

Réciproquement, partons d'un sous-groupe de Levi $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{G}$ qui est $\mathcal{J}$-admissible et choisissons un tore $\mathcal{T}$ déployé dont le centralisateur est $\mathcal{L}$ et qui se prolonge en un tore $\mathcal{T}_x$ de $\mathcal{J}$. Alors d'une part $\mathcal{T}_x$ s'envoie sur un sous-tore de $\mathcal{G}_x$ (car le noyau de $\mathcal{J}_k\longrightarrow\mathcal{G}_{x,k}$ est unipotent) donc $\mathcal{L}$ est $\mathcal{G}_x$-admissible et, par 6.1, on a $x\in B(\mathcal{L},F)$. D'autre part, comme l'immersion fermée $\mathcal{G}_{\beta,x,k_F}\longrightarrow\mathcal{J}_{k_F}$ induit un isomorphisme des quotients réductifs, le tore $\mathcal{T}_{x,k_F}$ est contenu dans $\mathcal{G}_{\beta,x,k_F}$. Par [14, Exp IX, Thm 3.6bis], il s'ensuit que $\mathcal{T}_x$ est conjugué par un élément de $J(\Lambda,\beta)$ à un tore de $\mathcal{G}_{\beta,x}$, et par conséquent que $\mathcal{L}$ contient un conjugué sous $J(\Lambda,\beta)$ du tore $F[\beta]^\times$. On déduit aussi du paragraphe précédent que le centre de $\mathcal{L}$ tout entier se prolonge en un sous-tore fermé de $\mathcal{J}$.

Rappelons maintenant les résultats suivants de la théorie des types :

Fait 7.7 *(Stevens) Avec les hypothèses et notations de la proposition 7.3,*

i) $J(\Lambda,\beta)$ *normalise* $H^+(\Lambda,\beta)$ *et* θ.

ii) $H^+(\Lambda,\beta)$ *a la décomposition d'Iwahori par rapport à* $P,\overline{P}$ *et les restrictions de tout caractère semi-simple dans* $\mathcal{C}(\Lambda,0,\beta)$ *à* $H^+\cap U$, $H^+\cap\overline{U}$ *sont triviales.*

iii) $[J^+(\Lambda,\beta),J^+(\Lambda,\beta)]\subseteq H^+(\Lambda,\beta)\subseteq J^+(\Lambda,\beta)$ *et l'application* $(u,\overline{u})\mapsto\theta([u,\overline{u}])$ *induit un accouplement non-dégénéré*

$$(J^+\cap U)/(H^+\cap U)\times(J^+\cap\overline{U})/(H^+\cap\overline{U})\longrightarrow R^\times.$$

iv) Écrivons $V=\bigoplus V_i$ *la décomposition associée à* M *et* $\beta=\oplus_i\beta_i$ *la décomposition de* β *correspondante. Alors* $H^+(\Lambda,\beta)\cap M=\prod_i H^+(\Lambda_i,\beta_i)$ *et la restriction de tout caractère semi-simple dans* $\mathcal{C}(\Lambda,0,\beta)$ *à* $H^+\cap M$ *est un produit de caractères semi-simples dans* $\mathcal{C}(\Lambda_i,0,\beta_i)$.

v) L'ensemble d'entrelacement $Int_{G_x}(\theta)$ de θ dans G_x est $J(\Lambda, \beta)$.

Preuve : (références et commentaires) le premier point est prouvé en [20, Coro 3.12 (iii)] et [20, Lemma 3.15.(iii)], et le dernier point découle de [20, Thm 3.22] (qui calcule l'entrelacement dans tout G). Le point iv) est une conséquence à peu près directe de la définition [20, 3.13] d'un caractère semi-simple et de la proposition 3.4 de [20]. La décomposition d'Iwahori du groupe H^+ et des caractères semisimples dans le point ii) découle de leur définition inductive, suivant le même argument que [11, 7.1.19] (qui est le cas simple), [12, Prop 5.2.ii)] ou [20, Lemma 3.15 i)]. Enfin le point iii) se déduit de [20, Prop. 3.24] et du point ii) suivant la même observation que [11, 7.2.3 (i)].

□

Fixons un parabolique $\mathcal{J}$-admissible minimal $\mathcal{Q} = \mathcal{L}\mathcal{V}$ de $\mathcal{G}$; par la discussion précédente on a $x \in B(\mathcal{L}, F)$ et on peut supposer, quitte à conjuguer, que $F[\beta]^\times \subset \mathcal{L}$. On peut donc appliquer les points i), ii) et iii) ci-dessus à Q à la place de P, et obtenir grâce à 5.3 que tout idempotent de $RJ(\Lambda, \beta)$ associé à un caractère semi-simple est "essentiellement de niveau zéro", au sens de 5.2. D'après le point iv) ci-dessus, l'idempotent ε_{θ_M} de $R(J(\Lambda, \beta) \cap M)$ est donc essentiellement de niveau 0 pour le modèle lisse de $\mathcal{M}$ obtenu comme adhérence schématique de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{J}$. Mais d'après le point ii) à nouveau et le point v), les hypothèses du corollaire 5.6 sont satisfaites pour le morphisme $\varphi : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{G}_x$ et pour $\widetilde{\varepsilon}' = \varepsilon_\theta$. Il ne reste donc plus qu'à appliquer ce corollaire.

7.8 *Preuve de la proposition 7.4 :* Ce résultat ne figure explicitement ni dans [20], ni dans [12], mais découle pourtant des techniques développées dans ces deux articles. La discussion qui suit entend en convaincre le lecteur déja familier de ces techniques.

Introduisons la famille de sous-groupes $H^r(\Lambda, \beta) := \mathfrak{h}(\Lambda, \beta) \cap \mathfrak{u}_r(\Lambda)$ pour $r \in \mathbb{R}_+$. Cette famille est décroissante et ses sauts sont dans le monoïde discret $\frac{1}{e(\Lambda)}\mathbb{N}$. Pour $r \in \mathbb{R}$, nous conviendrons de noter $r+$, resp. $r-$ le plus petit saut strictement plus grand que r, resp. le plus grand saut strictement plus petit que r. Lorsque r est inférieur à l'entier $k_0(\beta, \Lambda) = k_0(\beta)$ défini en [20, (3.6)], Stevens définit [20, 3.13] un ensemble de caractères complexes $\mathcal{C}(\Lambda, r, \beta)$ du groupe $H^{r+}(\Lambda, \beta)$, pour $r \in \mathbb{R}_+$. D'après [20], Rk 3.14.ii) et Lemma 3.15.i), les applications de restriction $\mathcal{C}(\Lambda, r, \beta) \longrightarrow \mathcal{C}(\Lambda, r', \beta)$ pour $0 \leqslant r \leqslant r' < k_0(\beta)$ sont surjectives. On peut donc prolonger la notation à tout $r \in \mathbb{R}_+$ en définissant $\mathcal{C}(\Lambda, r, \beta)$ comme l'ensemble des restrictions à $H^{r+}(\Lambda, \beta)$ des caractères dans $\mathcal{C}(\Lambda, 0, \beta)$. En particulier, pour $r \geqslant \frac{n}{2}$, on a $H^{r+}(\Lambda, \beta) = \mathfrak{u}_{r+}(\Lambda)$ et $\mathcal{C}(\Lambda, r, \beta) = \{\psi_{\beta|H^{r+}}\}$, où $\psi_\beta : \mathfrak{u}_{\frac{n}{2}+}(\Lambda) \longrightarrow \mathbb{Z}_{p-cycl}[\frac{1}{p}]^\times$ est le caractère $x \mapsto \psi(\mathrm{Tr}(\beta(x-1))$ associé à β et ψ. De plus, par [20, 3.14.(ii)], on a $\mathcal{C}(\Lambda, r, \beta) = \mathcal{C}(\Lambda, r, \gamma)$ pour toute strate $[\Lambda, n, r, \gamma]$ semi-simple, équivalente à $[\Lambda, n, r, \beta]$ et telle que $F[\gamma]^\times \subset M(\beta)$ où $M(\beta)$ est le Levi de G découpé par l'algèbre semi-simple $F[\beta] \subset A$.

Revenons à l'énoncé de 7.4. Posons $n := \max(n_{\beta_i})_{i \in I}$ et notons M le sous-groupe de Levi associé à la décomposition $\Lambda = \bigoplus_{i \in I} \Lambda_i$. La strate semi-simple $\prod_i [\Lambda_i, n_{\beta_i}, 0, \beta_i]$ pour M découpe un Levi $M(\beta) \subset M$ dont nous noterons $V = \bigoplus_{j \in J_\beta} V_j$ la décomposition associée. On a donc une application surjective $J_\beta \longrightarrow I$ qui à j associe l'unique $i(j)$ tel que $V_j \subset \Lambda_{i(j)} \otimes F$, et des décompositions $\Lambda_i = \bigoplus_{j \mapsto i} \Lambda_i \cap V_j$.

Nous allons prouver par récurrence descendante sur $n \geqslant t \geqslant 0$ (nombre fini de sauts !) l'assertion suivante :

Il existe une strate semi-simple $[\Lambda, n, t, \gamma^t]$ avec $F[\gamma^t]^\times \subset M(\beta) \subset M(\gamma^t)$, et un caractère semi-simple $\theta^t \in \mathcal{C}(\Lambda, 0, \gamma^t)$ tels que
– $H^{t+}(\Lambda, \gamma^t) \cap M = \prod_i H^{t+}(\Lambda_i, \beta_i)$,
– $\theta^t_{|H^{t+}(\Lambda, \gamma^t) \cap M} = \prod_i \theta_{i|H^{t+}(\Lambda_i, \beta_i)}$

Le premier saut est $t = n$, pour lequel il suffit de prendre la strate nulle $[\Lambda, n, n, \gamma^n = 0]$ et le caractère trivial de $H^+(\Lambda, \gamma^n) = \mathfrak{u}_{0+}(\Lambda)$.

Supposons donc l'énoncé connu pour t et déduisons-le pour $t-$. Écrivons $\gamma^t = \bigoplus_{i \in I} \gamma_i^t$ la décomposition de γ^t comme élément de M. Comme en 7.7 iv), pour tout $r \in \mathbb{R}_+$ on a $H^{r+}(\Lambda, \gamma^t) \cap M = \prod_i H^{r+}(\Lambda_i, \gamma_i^t)$ et si $\theta \in \mathcal{C}(\Lambda, r, \gamma^t)$, alors $\theta_{|H^{r+}(\Lambda, \gamma^t) \cap M}$ est un produit sur i de caractères semi-simples dans $\mathcal{C}(\Lambda_i, r, \gamma_i^t)$. On déduit alors du lemme 7.9 ci-dessous et de l'hypothèse de récurrence que $H^t(\Lambda,\gamma^t)\cap M = \prod_i H^t(\Lambda_i,\beta_i)$. Il existe donc un élément $b = \bigoplus_i b_i \in \bigoplus_i \mathfrak{a}_{-t}(\Lambda_i) \subset \mathfrak{a}_{-t}(\Lambda)$ tel que

$$\theta^t_{|H^t(\Lambda,\gamma^t)\cap M}.\psi_{b|H^t(\Lambda,\gamma^t)\cap M} = \prod_{i\in I} \theta_{i|H^t(\Lambda_i,\beta_i)},$$

où ψ_b est le caractère de $\mathfrak{u}_t(\Lambda)/\mathfrak{u}_{t+}(\Lambda)$ associé à ψ et b. En fait, par décomposition d'Iwahori 7.7 ii)4 des caractères semi-simples, on peut supposer que chaque b_i se décompose en $b_i = \bigoplus_{j\mapsto i} b_j$ avec $b_j \in \mathfrak{a}_{-t}(\Lambda_i \cap V_j)$ et $j \in J_\beta$, de sorte que pour tout $j \in J_\beta$, on a

$$\theta^t_{|H^t(\Lambda_j,\gamma_j^t)}.\psi_{b_j\,|H^t(\Lambda_j,\gamma_j^t)} = \theta_{i(j)\,|H^t(\Lambda_j,\beta_j)}$$

où les deux θ ainsi restreints sont des caractères *simples*.

Soit alors $V = \bigoplus_{k\in K_t} V_k$ la décomposition déterminée par l'algèbre semi-simple $F[\gamma^t]$ (correspondant au Levi $M(\gamma^t)$). Puisque $M(\gamma^t) \supset M(\beta)$, on a une application surjective $J_\beta \longrightarrow K_t$ qui à j associe l'unique $k(j)$ tel que $V_j \subset V_{k(j)}$. On a aussi la décomposition en produit de corps $F[\gamma^t] \simeq \prod_{k\in K_t} E_k$. Choisissons alors pour chaque $k \in K_t$ une corestriction modérée $s_k : End_F(V_k) \longrightarrow End_{E_k}(V_k)$. Puisque $F[\gamma^t]^\times \subset M(\beta)$, celle-ci induit par restriction une corestriction modérée $s_j : End_F(V_j) \longrightarrow End_{E_k}(V_j)$ pour tout j tel que $k = k(j)$. D'après [12, 4.6], la $E_{k(j)}$-strate $[\Lambda_j, t, t-, s_j(b_j)]$ est équivalente à une strate simple, éventuellement nulle. On en déduit que pour tout $k \in K_t$, la E_k-strate $[\Lambda_k, t, t-, s_k(b_k)]$, où $\Lambda_k = \bigoplus_{j\mapsto k} \Lambda_j$ et $b_k := \bigoplus_{j\mapsto k} b_j$ est équivalente à une strate semi-simple. Par [20, 3.5], il s'ensuit que la strate $[\Lambda, n, t-, \gamma^t + b]$ est équivalente à une strate semi-simple, disons $[\Lambda, n, t-, \gamma^{t-}]$. En outre, comme dans la preuve de [20, 3.4], on peut choisit γ^{t-} tel que $F[\gamma^{t-}]^\times \subset M(\beta)$. D'après [20, Rk 3.14.(i)], on a $H^t(\Lambda,\gamma^{t-}) = H^t(\Lambda,\gamma^t)$ et $\mathcal{C}(\Lambda, t-, \gamma^{t-}) = \psi_b.\mathcal{C}(\Lambda, t-, \gamma^t)$. Comme l'application de restriction des caractères induit une surjection $\mathcal{C}(\Lambda,0,\gamma^{t-}) \longrightarrow \mathcal{C}(\Lambda,t-,\gamma^{t-})$ on peut choisir un $\theta^{t-} \in \mathcal{C}(\Lambda,0,\gamma^{t-})$ tel que

$$\theta^{t-}_{|H^t(\Lambda,\gamma^{t-})} = (\psi_b\theta^t)_{|H^t(\Lambda,\gamma^t)}.$$

Celui-ci remplit le cahier des charges.

Nous avons utilisé dans cette preuve le lemme suivant qui est une généralisation au cas semi-simple de [11, 3.5.9].

Lemme 7.9 *Soient* $[\Lambda, n, 0, \beta_i]$, $i = 1, 2$, *deux strates semi-simples et* $r > 0$ *telles que* $H^{r+}(\Lambda,\beta_1) = H^{r+}(\Lambda,\beta_2)$, *et* $\mathcal{C}(\Lambda,r,\beta_1)\cap\mathcal{C}(\Lambda,r,\beta_2) \neq \emptyset$. *Alors* $H^r(\Lambda,\beta_1) = H^r(\Lambda,\beta_2)$.

Preuve : Choisissons deux strates $[\Lambda, n, 2r, \gamma_i]$ semi-simples avec $\gamma_i \in M(\beta_i)$, et respectivement équivalentes à $[\Lambda, n, 2r, \beta_i]$. On sait alors que pour tout $t \geqslant r$, on a $\mathfrak{h}^t(\Lambda,\beta_i) = \mathfrak{h}^t(\Lambda,\gamma_i)$ et $\mathcal{C}(\Lambda,2t,\beta_i) = \mathcal{C}(\Lambda,2t,\gamma_i)$. En particulier, puisque pour tous $t \geqslant t'$ l'application de restriction $\mathcal{C}(\Lambda,t',\beta_i) \longrightarrow \mathcal{C}(\Lambda,t,\beta_i)$ est surjective, on a $\mathcal{C}(\Lambda,2r,\gamma_1)\cap\mathcal{C}(\Lambda,2r,\gamma_2) \neq \emptyset$. Soit θ un élément de cette intersection, le théorème 3.22 de [20] calcule l'ensemble d'entrelacement de θ dans G et nous fournit l'égalité

$$\Gamma_{2r}(\Lambda,\gamma_1)G_{\gamma_1}\Gamma_{2r}(\Lambda,\gamma_1) = \Gamma_{2r}(\Lambda,\gamma_2)G_{\gamma_2}\Gamma_{2r}(\Lambda,\gamma_2)$$

avec les notations de *loc. cit.* En prenant l'intersection avec $\mathfrak{a}_r(\Lambda)$ et en prenant la clôture additive, on obtient l'indépendance de i de l'ensemble suivant :

$$(7.10)\qquad (\mathfrak{a}_r(\Lambda)\cap A_{\gamma_i}) + (\mathfrak{a}_r(\Lambda)\cap A_{\gamma_i})(\mathfrak{n}_{-2r}(\Lambda,\gamma_i)\cap\mathfrak{a}_{r_i-2r}(\Lambda)) + (\mathfrak{a}_r(\Lambda)\cap A_{\gamma_i})\mathfrak{j}^{\frac{r_i}{2}}(\Lambda,\gamma_i)$$

où on a posé $r_i := k_0(\gamma_i,\Lambda)$ (*cf* [20, (3.6)]). Soit $r_i' := 2r - \frac{r_i}{2} < r$. On a

$$\begin{aligned}(\mathfrak{a}_{r_i'}(\Lambda)\cap A_{\gamma_i})(\mathfrak{n}_{-2r}(\Lambda,\gamma_i)\cap\mathfrak{a}_{r_i-2r}(\Lambda)) &\subset (\mathfrak{n}_{-\frac{r_i}{2}}(\Lambda,\gamma_i)\cap\mathfrak{a}_{\frac{r_i}{2}}(\Lambda))\\ &\subset \mathfrak{j}^{\frac{r_i}{2}}(\Lambda,\gamma_i)\end{aligned}$$

par [20, 3.10.i)], donc

$$\begin{aligned}(\mathfrak{a}_r(\Lambda)\cap A_{\gamma_i})(\mathfrak{n}_{-2r}(\Lambda,\gamma_i)\cap\mathfrak{a}_{r_i-2r}(\Lambda)) &\subset (\mathfrak{a}_{r-r_i'}(\Lambda)\cap A_{\gamma_i})\mathfrak{j}^{\frac{r_i}{2}}(\Lambda,\gamma_i)\\ &\subset \mathfrak{h}^{\frac{r_i}{2}+}(\Lambda,\gamma_i)\subset\mathfrak{h}^{r+}(\Lambda,\gamma_i)\end{aligned}$$

par [20, 3.11.i)]. De plus, par [20, 3.11.ii)], on a $(\mathfrak{a}_r(\Lambda)\cap A_{\gamma_i})\mathfrak{j}^{\frac{r_i}{2}}(\Lambda,\gamma_i)\subset\mathfrak{h}^{r+}(\Lambda,\gamma_i)$. Ajoutons alors à l'ensemble 7.10 le groupe $\mathfrak{h}^{r+}(\Lambda,\gamma_i)$ qui par hypothèse est aussi indépendant de i. On obtient que l'ensemble $(\mathfrak{a}_r(\Lambda)\cap A_{\gamma_i})+\mathfrak{h}^{r+}(\Lambda,\gamma_i)$ est indépendant de i. Mais celui-ci n'est autre que $\mathfrak{h}^r(\Lambda,\gamma_i)$ puisque $r_i>2r$. $\square$

Pour la preuve de la proposition 7.5, on renvoie à celle de la proposition 8.5 au paragraphe 8.9.

8 Groupes classiques

Nous adoptons les notations de Stevens dans [20]. Cette fois le corps de base, que nous notions K précédemment sera noté F_0 et sera supposé être le corps des points fixes d'une involution $x\mapsto\overline{x}$ sur un corps F de caractéristique résiduelle différente de 2. On n'écarte pas le cas où $F_0=F$ et l'involution est l'identité. Soit V un F-espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire h ε-hermitienne (pour $\varepsilon=\pm1$) non-dégénérée. La F-algèbre A est munie de l'anti-involution "adjoint pour h" qui prolonge l'involution donnée sur F et que nous noterons encore $x\mapsto\overline{x}$. Notons $\widetilde{\mathcal{G}}$ le F-groupe $\mathcal{GL}(V)$; alors cette anti-involution munit le F_0-schéma en groupes $\mathrm{Res}_{F|F_0}(\widetilde{\mathcal{G}})$ d'une involution σ dont le sous-schéma des points fixes $\mathcal{G}$ s'identifie au F_0-schéma en groupes unitaire, orthogonal ou symplectique associé à (V,h).

8.1 *Immeuble et fonctions réseaux autoduales* : La référence ici est [7]. Pour un $\mathcal{O}_F$-réseau L de V, on note $L^\#:=\{v\in V,\ h(v,L)\subset\mathfrak{P}_F\}$, et pour une fonction réseau $\Lambda\in\mathcal{FR}_F(V)$, on note $\Lambda^\#$ la fontion réseau $r\mapsto\Lambda((-r)+)^\#$. La bijection naturelle $B(\mathrm{Res}_{F|F_0}(\widetilde{\mathcal{G}}),F_0)=B(\widetilde{\mathcal{G}},F)\xrightarrow{\sim}\mathcal{FR}_F(V)$ est compatible avec les involutions σ sur $B(\mathrm{Res}_{F|F_0}(\widetilde{\mathcal{G}}),F_0)$ et $\#$ sur $\mathcal{FR}_F(V)$. Par l'hypothèse de caractéristique résiduelle $\neq2$, elle induit en prenant les invariants une application bijective et G-équivariante $B(\mathcal{G},F_0)\longrightarrow\mathcal{FR}_F(V)^\#$.

Si $\Lambda\in\mathcal{FR}_F(V)^\#$, on a $\overline{\mathfrak{a}_r(\Lambda)}=\mathfrak{a}_r(\Lambda)$, resp. $\sigma(\mathfrak{u}_r(\Lambda))=\mathfrak{u}_r(\Lambda)$, pour tout $r\in\mathbb{R}$, resp. $r\in\mathbb{R}_+$. Si $x\in B(\mathcal{G},F_0)$ correspond à Λ, alors $G_x=G\cap\mathfrak{u}_0(\Lambda)=\mathfrak{u}_0(\Lambda)^\sigma$ et $G_x^+=G\cap\mathfrak{u}_{0+}(\Lambda)=\mathfrak{u}_{0+}(\Lambda)^\sigma$, et les spécialistes s'accordent à penser que la filtration $(\mathfrak{u}_r(\Lambda)^\sigma)_{r\in\mathbb{R}_+}$ coïncide avec celle de Moy et Prasad $(G_{x,r})_{r\in\mathbb{R}}$ (ce qui ne nous importe guère ici). Un sous-groupe de Levi $\mathcal{M}$ de $\mathcal{G}$ correspond à une décomposition h-orthogonale $V=\bigoplus_{i\in I}(V_i\oplus V_{-i})\bigoplus V_0$ où $h_{|V_0\times V_0}$ est non-dégénérée et pour chaque $i\in I$, V_i est totalement isotrope et $h_{|V_i\times V_{-i}}$ est un accouplement parfait. On a alors $M:=\mathcal{M}(F_0)\simeq\prod_{i\in I}Aut_F(V_i)\times Aut_F(V_0)^\sigma$. Le sous-immeuble $B(\mathcal{M},F_0)$ correspond aux Λ qui sont décomposées sous la forme $\Lambda=\bigoplus_{i\in I}(\Lambda_i\oplus\Lambda_{-i})\bigoplus\Lambda_0$ où $\Lambda_0\in\mathcal{FR}_F(V_0)^\#$ et les $\Lambda_{\pm i}\in\mathcal{FR}_F(V_{\pm i})$ sont telles que $\Lambda_{-i}=\Lambda_i^\#$. Si x est le point correspondant à Λ, alors le sous-espace affine $x+a_M$ de $B(\mathcal{M},F_0)$ est l'ensemble des Λ' de la forme $\bigoplus_{i\in I}(\Lambda_i[t_i]\oplus\Lambda_i[t_i]^\#)\bigoplus\Lambda_0$ où $t_i\in\mathbb{R}$.

8.2 *Strates semi-simples autoduales* : Une F-strate $[\Lambda,n,r,\gamma]$ dans V est dite autoduale si $\Lambda=\Lambda^\#$ et $\overline{\gamma}=-\gamma$. Soit $[\Lambda,n,r,\beta]$ une strate semi-simple et autoduale. La sous-algèbre $F[\beta]\subset A$ est stable par $x\mapsto\overline{x}$ et l'ensemble de ses idempotents centraux primitifs aussi. On peut donc arranger la décomposition de V associée à β sous la forme $V=\bigoplus_{i\in I_\beta}(V_i\oplus V_{-i})\bigoplus_{j\in J_\beta}V_j$ où les espaces indexés par $I_\beta\cup J_\beta$ sont deux à deux orthogonaux et pour $i\in I_\beta$, V_i et V_{-i} sont isotropes maximaux dans $V_i\oplus V_{-i}$. Suivant Stevens, la strate semisimple autoduale $[\Lambda,n,r,\beta]$ est dite *gauche* (skew en anglais), si $I_\beta=\emptyset$, c'est-à-dire si β est elliptique.

Dans [20, 3.6], Stevens définit les caractères semi-simples pour G associés à une strate semi-simple gauche $[\Lambda,n,0,\beta]$. L'hypothèse gauche n'est pas nécessaire pour cette définition, il suffit de supposer la strate autoduale; le point est que pour tout $r>0$, on peut trouver une strate semi-simple *autoduale* $[\Lambda,n,r,\gamma]$ équivalente à $[\Lambda,n,r,\beta]$, avec de plus γ dans le Levi de $GL(V)$ découpé par β (combiner [20, 3.4] et [19, (1.10)]). Il s'ensuit que les ordres $\mathfrak{h}(\Lambda,\beta)$ et $\mathfrak{j}(\Lambda,\beta)$ sont stables par l'involution $x\mapsto\overline{x}$, les groupes $H^{r+}(\Lambda,\beta)$ et $J^{r+}(\Lambda,\beta)$ sont stables par σ, ainsi que les ensembles de caractères semi-simples $\mathcal{C}(\Lambda,r,\beta)$. Un caractère semi-simple de $H^{r+}(\Lambda,\beta)^\sigma$ est alors, par définition, la restriction d'un caractère semi-simple σ-invariant de $H^{r+}(\Lambda,\beta)^\sigma$.

Proposition 8.3 *Soit $[\Lambda, n, 0, \beta]$ une strate semi-simple autoduale et $\mathcal{P} = \mathcal{M}\mathcal{U}$ un sous-groupe parabolique de $\mathcal{G}$ tel que M contienne le "tore" $(F[\beta]^\times)^\sigma$ et $B(\mathcal{M}, F_0)$ contienne le point x de $B(\mathcal{G}, F_0)$ associé à Λ. Soit $\theta \in \mathcal{C}(\Lambda, 0, \beta)^\sigma$, θ_M sa restriction à $H^+(\Lambda, \beta)^\sigma \cap M$ et ε_{θ_M} l'idempotent de RM_x associé, où $R = \mathbb{Z}_{p-cycl}[\frac{1}{p}]$. On a*

$$e_{U_x^+} e_{\overline{U}_x} \varepsilon_{\theta_M} \in RG_x e_{U_x} e_{\overline{U}_x} \varepsilon_{\theta_M}.$$

Partons maintenant d'un sous-groupe parabolique $\mathcal{P} = \mathcal{M}\mathcal{U}$ dans $\mathcal{G}$ et notons $V = \bigoplus_{i \in I}(V_i \oplus V_{-i}) \bigoplus V_0$ la décomposition orthogonale de V associée au sous-groupe de Levi $\mathcal{M}$. Donnons-nous pour chaque $i \neq 0$ une strate semi-simple $[\Lambda_i, n_i, 0, \beta_i]$ dans $End_F(V_i)$ et un caractère semi-simple $\theta_i \in \mathcal{C}(\Lambda_i, 0, \beta_i)$, ainsi qu'une strate semi-simple autoduale $[\Lambda_0, n_0, 0, \beta_0]$ et un caractère semi-simple $\theta_0 \in \mathcal{C}(\Lambda_0, 0, \beta_0)^\sigma$. La collection des Λ_i correspond à un point de $B(\mathcal{M}, F_0)$ et la collection des caractères semi-simples nous fournit un idempotent $\varepsilon \in RM_x$ que nous qualifierons de *semi-simple.*

Proposition 8.4 *Soit $\Lambda := \bigoplus_{i \in I}(\Lambda_i \oplus \Lambda_{-i}^{\#}) \bigoplus \Lambda_0$. Il existe une strate semisimple autoduale $[\Lambda, n, 0, \beta]$ avec $(F[\beta]^\times)^\sigma \subset M$ et un caractère semi-simple $\theta \in \mathcal{C}(\Lambda, 0, \beta)^\sigma$ tel que $\varepsilon_{\theta_M} = \varepsilon$.*

En appliquant ce résultat aux collections translatées $\Lambda_i[t_i]$, avec $t_i \in \mathbb{Q}$ pour $i \neq 0$, on en déduit que l'idempotent ε est P-bon au sens de 3.6.

Proposition 8.5 *(Stevens) Les idempotents semi-simples forment une famille génératrice de la catégorie $\mathrm{Mod}_R(M)$.*

8.6 *Preuve de la proposition 8.3* : Comme dans la preuve de la proposition 7.3, on veut appliquer 5.3 et 5.6. Rappelons que dans ladite preuve, nous avons introduit et utilisé des morphismes de $\mathcal{O}_F$-schémas en groupes lisses

$$\widetilde{\mathcal{G}}_{\beta,x} \xrightarrow{\tilde{\psi}_\beta} \widetilde{\mathcal{J}} \xrightarrow{\tilde{\varphi}} \widetilde{\mathcal{G}}_x$$

(on rajoute ici des $\tilde{}$ pour être cohérent avec les notations du paragraphe 8.1). Comme les ordres auxquels ils sont associés, ces schémas en groupes sont munis d'une action semi-linéaire de σ. Appliquons-leur le foncteur $\mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F|\mathcal{O}_{F_0}}(-)^\sigma$. On sait que la restriction des scalaires préserve la lissité, et d'après [15, 3.4] et l'hypothèse de caractéristique résiduelle $\neq 2$, le passage aux σ-invariants aussi. On obtient donc des morphismes de $\mathcal{O}_{F_0}$-schémas en groupes lisses

$$\mathcal{G}_{\beta,x} \xrightarrow{\psi_\beta} \mathcal{J} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G}_x,$$

le premier étant une immersion fermée et le second induisant un isomorphisme des fibres génériques. Les points entiers sont donnés par $\mathcal{G}_x(\mathcal{O}_{F_0}) = G_x$ et $\mathcal{J}(\mathcal{O}_{F_0}) = J(\Lambda, \beta)^\sigma$. En particulier $\mathcal{G}_x$ est le modèle lisse de $\mathcal{G}$ associé par Bruhat-Tits à $x \in B(\mathcal{G}, F)$. Comme dans le cas linéaire, par définition d'une strate semi-simple auto-duale, la fonction-réseau Λ définit un point, disons x_β de l'immeuble du centralisateur $\mathcal{G}_\beta$, et le groupe $G_{\beta,x}$ s'identifie au fixateur de x_β (voir aussi [7, part. 6]). Il s'ensuit que $\mathcal{G}_{\beta,x}$ est le modèle lisse de $\mathcal{G}$ associé par Bruhat-Tits à x_β.

Vient maintenant une difficulté technique par rapport au cas linéraire : si la restriction des scalaires préserve la connexité, il n'en va pas de même du passage aux σ-invariants. En fait, dans les cas unitaires et symplectiques, où $\mathcal{G}$ est connexe et simplement connexe, on sait que $\mathcal{G}_x$ et $\mathcal{G}_{\beta,x}$ sont connexes et donc, comme on va le voir ci-dessous, $\mathcal{J}$ l'est aussi. On peut alors suivre mot pour mot la même preuve que 7.3, grâce à 8.7 ci-dessous. Dans le cas orthogonal impair, $\mathcal{G}$ est connexe mais pas simplement connexe et les $\mathcal{G}_x$ et $\mathcal{G}_{\beta,x}$ peuvent ne pas être connexes. Dans le cas orthogonal pair, $\mathcal{G}$ lui-même n'est déja pas connexe! Cependant on observe comme dans la preuve de 6.2 que les idempotents e_{U_x}, $e_{\overline{U}_x}$ de l'énoncé de 8.3 vivent dans RG_x°, et que par ailleurs $\varepsilon_{\theta_M} \in RJ^+(\Lambda, \beta) = R\mathcal{J}^\dagger(\mathcal{O}_{F_0}) \subset R\mathcal{J}^\circ(\mathcal{O}_{F_0})$. On peut donc essayer de raisonner sur les composantes neutres de ces groupes, ce qui permettra d'appliquer les résultats de la partie 5.

Commençons par vérifier que le Levi $\mathcal{M}$ de l'énoncé de 8.3 est $\mathcal{J}^\circ$-admissible. Soit $\widetilde{\mathcal{M}}$ le sous-groupe de Levi de $\widetilde{\mathcal{G}}$ découpé par la décomposition associée à $\mathcal{M}$. On a donc $\mathcal{M} = \mathrm{Res}_{F|F_0}(\widetilde{\mathcal{M}})^\sigma$. D'après les hypothèses faites sur x et $\mathcal{M}$ et la preuve de la proposition 7.3, $\widetilde{\mathcal{M}}$ est $\widetilde{\mathcal{J}}$-admissible et même, plus précisément, $\mathcal{Z}(\widetilde{\mathcal{M}})$ se prolonge en un tore déployé de $\widetilde{\mathcal{J}}$. Il s'ensuit que la partie déployée du centre $\mathrm{Res}_{F|F_0}(\mathcal{Z}(\widetilde{\mathcal{M}}))$ de $\mathrm{Res}_{F|F_0}(\widetilde{\mathcal{M}})$ se prolonge en un $\mathcal{O}_{F_0}$-tore déployé de $\mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F|\mathcal{O}_{F_0}}(\widetilde{\mathcal{J}})$, puis, passant aux points fixes, on en déduit que la partie déployée connexe de $\mathcal{Z}(\mathcal{M})$ se prolonge en un tore de $\mathcal{J}$, et donc que $\mathcal{M}$ est $\mathcal{J}^\circ$-admissible.

Pour suivre la stratégie de la preuve de 7.3, l'analogue de 7.7 est :

Fait 8.7 *(Stevens) Avec les hypothèses et notations de la proposition 7.3,*

i) $J(\Lambda,\beta)^\sigma$ *normalise* $H^+(\Lambda,\beta)^\sigma$ *et* θ.

ii) $H^+(\Lambda,\beta)^\sigma$ *a la décomposition d'Iwahori par rapport à* $P, \overline{P}$ *et les restrictions de tout caractère semi-simple dans* $\mathcal{C}(\Lambda,0,\beta)^\sigma$ *à* $H^+\cap U$, $H^+\cap\overline{U}$ *sont triviales.*

iii) $[J^+(\Lambda,\beta)^\sigma, J^+(\Lambda,\beta)^\sigma]\subseteq H^+(\Lambda,\beta)^\sigma\subseteq J^+(\Lambda,\beta)^\sigma$ *et l'application* $(u,\overline{u})\mapsto\theta([u,\overline{u}])$ *induit un accouplement non-dégénéré*

$$(J^+\cap U)/(H^+\cap U)\times(J^+\cap\overline{U})/(H^+\cap\overline{U})\longrightarrow R^\times.$$

iv) Écrivons $V=\bigoplus_i(V_i\oplus V_i)\bigoplus V_0$ *la décomposition orthogonale de* V *associée à* M, $\beta=\oplus_i(\beta_i\oplus\beta_{-i})\oplus\beta_0$ *la décomposition de* β *correspondante, et identifions* M *à* $\prod_i GL(V_i)\times GL(V_0)^\sigma$. *Alors* $H^+(\Lambda,\beta)\cap M\simeq\prod_i H^+(\Lambda_i,\beta_i)\times H^+(\Lambda_0,\beta_0)^\sigma$ *et la restriction de tout caractère semi-simple dans* $\mathcal{C}(\Lambda,0,\beta)$ *à* $H^+\cap M$ *s'identifie à un produit de caractères semi-simples dans* $\mathcal{C}(\Lambda_i,0,\beta_i)$ *par un caractère semi-simple autodual dans* $\mathcal{C}(\Lambda_0,0,\beta_0)^\sigma$.

v) L'ensemble d'entrelacement $Int_{G_x}(\theta)$ *de* θ *dans* G_x *est* $J(\Lambda,\beta)^\sigma$.

Preuve : (références et commentaires) les deux premiers points découlent immédiatement des points correspondants de 7.7. Le point iii) est prouvé dans [20, 3.28]. Le point iv) se prouve comme le point correspondant de 7.7, en combinant [19, (1.10)] et [20, Prop 3.4]. Enfin, le dernier point découle de [20, Thm 3.27] qui calcule l'entrelacement dans tout G. □

On remarque que les points ii) iii) et iv) de 8.7 concernent des objets relatifs à $\mathcal{J}^\circ$ et on peut toujours restreindre le point i) à $\mathcal{J}^\circ(\mathcal{O}_{F_0})$. On en déduit en particulier comme dans le cas linéaire que ε_{θ_M} est un idempotent essentiellement de niveau zéro pour le modèle lisse de $\mathcal{M}$ obtenu par adhérence schématique dans $\mathcal{J}^\circ$.

Le point v) nous donne $\mathrm{Int}_{G_x^\circ}(\theta)=J(\Lambda,\beta)^\sigma\cap G_x^\circ$, ce qui, compte tenu de ce que $\mathcal{U}_x$ est connexe (voir preuve de 6.2) implique $\mathrm{Int}_{U_x}(\varepsilon_\theta)=\mathcal{J}(\mathcal{O}_{F_0})\cap U_x$. Ainsi, pour pouvoir appliquer 5.6 au morphisme $\mathcal{J}^\circ\longrightarrow\mathcal{G}_x^\circ$, avec $\varepsilon':=\varepsilon_{\theta_M}$ et $\widetilde{\varepsilon}':=\varepsilon_\theta$, et terminer la preuve de 8.3 comme dans le cas linéaire, il reste deux choses à prouver :

i) $U_x^+\cap\mathcal{J}(\mathcal{O}_{F_0})\subseteq U_x\cap\mathcal{J}^\dagger(\mathcal{O}_{F_0})$

ii) $\mathcal{J}(\mathcal{O}_{F_0})\cap U_x=\mathcal{J}^\circ(\mathcal{O}_{F_0})\cap U_x$.

Pour cela, l'ingrédient essentiel est : *soit* $\mathcal{N}_k$ *un groupe unipotent sur un corps parfait de caractéristique* $\neq 2$ *et* σ *une involution. Alors* $H^1(\langle\sigma\rangle,\mathcal{N}_k)=0$, *et si de plus* $\mathcal{N}_k$ *est lisse et connexe, alors* $\mathcal{N}_k^\sigma$ *l'est aussi.* Utilisant une série centrale caractéristique, l'assertion sur le H^1 se dévisse immédiatement au cas abélien où elle est évidente. Pour l'assertion de connexité, on peut commencer par étendre les scalaires à une clôture algébrique. Utilisant ensuite une série centrale caractéristique dont les sous-quotients sont des produits de $\mathbb{G}_a$ [14, Exp. 4.1.1 iii) et 4.1.5] et la nullité du H^1 qu'on vient de vérifier, on est ramené au cas $\mathcal{N}_k\simeq\mathbb{G}_a^r$. On peut alors diagonaliser la matrice de σ et réduire encore au cas $r=1$ où c'est évident.

Prouvons alors ii) : il suffit de voir que l'adhérence schématique de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{J}$ est connexe. Or, celle-ci est la partie σ-invariante de l'adhérence schématique de $\mathrm{Res}_{F|F_0}(\widetilde{\mathcal{U}})$ dans $\mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F|\mathcal{O}_{F_0}}(\widetilde{\mathcal{J}})$, laquelle est connexe par 5.9 ii), puisque $\mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F|\mathcal{O}_{F_0}}(\widetilde{\mathcal{J}})$ est connexe. L'assertion de connexité de l'ingrédient ci-dessus permet donc de conclure. Pour obtenir i), nous prouverons l'assertion plus forte $\varphi^{-1}({}^u\mathcal{G}_{x,k})={}^u\mathcal{J}_k$, ce qui équivaut à $\mathcal{J}^\dagger(\mathcal{O}_{F_0})=\mathcal{J}(\mathcal{O}_{F_0})\cap G_x^+$. Posons $\breve{\mathcal{J}}:=\mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F|\mathcal{O}_{F_0}}(\widetilde{\mathcal{J}})$ et $k:=k_{F_0}$ pour alléger les notations. La nullité du H^1 ci-dessus montre qu'en appliquant le foncteur des σ-invariants, la suite exacte ${}^u\breve{\mathcal{J}}_k\hookrightarrow\breve{\mathcal{J}}_k\twoheadrightarrow{}^q\breve{\mathcal{J}}_k$ reste exacte. L'assertion de connexité, et le fait que le groupe des invariants d'un groupe réductif par une involution est réductif assurent alors que ${}^u\breve{\mathcal{J}}_k{}^\sigma = {}^u\mathcal{J}_k$. De même avec des notations similaires, on a ${}^u\breve{\mathcal{G}}_{x,k}{}^\sigma = {}^u\mathcal{G}_{x,k}$. Mais on sait que $\breve{\varphi}^{-1}({}^u\breve{\mathcal{G}}_{x,k}) = {}^u\breve{\mathcal{J}}_k$ par le cas linéaire (par compatibilité entre les radicaux de Jacobson des ordres auxquels sont associés ces groupes), et il ne reste plus qu'à prendre les σ-invariants.

On en déduit aussi au passage que ψ_β induit un isomorphisme $\pi_0(\mathcal{G}_{\beta,x,k}) \xrightarrow{\sim} \pi_0(\mathcal{J}_k)$, *i.e.* que le défaut de connexité de $\mathcal{J}$ est le même que celui de $\mathcal{G}_{\beta,x}$.

8.8 *Preuve de la proposition 8.4 :* On peut faire le même raisonnement inductif que pour la preuve de 7.4, en demandant que les strates intermédiaires $[\Lambda, n, t, \gamma^t]$ vérifient $\gamma^t = -\overline{\gamma^t}$ et que les caractères $\theta^t \in \mathcal{C}(\Lambda, 0, \gamma^t)$ soient invariants par σ. Pour assurer la propriété requise des γ^{t-} dans la construction inductive, on utilise [19, (1.10)]. L'invariance des caractères θ^{t-} sous σ est alors automatique par décomposition d'Iwahori.

8.9 *Preuve de la proposition 8.5 :* Le groupe M est un produit de groupes linéaires et d'un groupe classique, il suffit donc de traiter chacun de ces groupes séparément. En fait nous ne traiterons que le cas classique car c'est le cadre dans lequel les outils nécessaires ont été développés par Stevens (notamment le lemme 5.4. de [20]). Nous laisserons le lecteur se convaincre que la même preuve fonctionne dans le cas linéaire, en admettant que les outils correspondants sont encore valables (ils sont en fait plus faciles à obtenir et souvent, un analogue "simple" se trouve dans [11, Ch. 8.1]).

Supposons donc $M = G$, $R = \mathbb{Z}_{p-cycl}[\frac{1}{p}]$ et $V \in Mod_R(G)$. On veut trouver un idempotent semi-simple ε tel que $\varepsilon V \neq 0$. Il suffit bien-sûr de le faire pour V irréductible. Quitte à étendre les scalaires on peut supposer que V est définie sur un corps algébriquement clos de caractéristique différente de p.

Donnons-nous une strate $[\Lambda, n, r, \beta]$ semi-simple autoduale avec $r \leqslant n$ et un caractère $\theta \in \mathcal{C}(\Lambda, r, \beta)^\sigma$ tels que $\varepsilon_\theta V \neq 0$. Remarquons que pour r assez grand, il existe de telles données. Choisissons un prolongement $\widetilde{\theta} \in \mathcal{C}(\Lambda, r-, \beta)$ de θ. Nous noterons $A_- := \{x \in A = End_F(V), x = -\overline{x}\}$ et $\mathfrak{a}_\bullet(\Lambda)_- := A_- \cap \mathfrak{a}_\bullet(\Lambda)$. Comme dans le début de la preuve du théorème 5.1 de [20], il existe un élément $c \in \mathfrak{a}_{-r}(\Lambda)_-$ tel que le caractère $\vartheta := \widetilde{\theta}\psi_{c|H^r(\Lambda,\beta)^\sigma}$ apparaisse dans $V_{|H^r(\Lambda,\beta)^\sigma}$. Décomposons $F[\beta] = \prod_{i \in I_\beta}(E_i \times E_{-i}) \times \prod_{j \in J_\beta} E_j$ en un produit de corps où l'involution $x \mapsto \overline{x}$ identifie E_i et E_{-i} et stabilise chaque E_j. On a aussi la décomposition orthogonale $V = \bigoplus_{i \in I_\beta}(V_i \oplus V_{-i}) \bigoplus_{j \in J_\beta} V_j$ selon les idempotents primitifs de ce produit. Par le même argument que le lemme 5.2 et le paragraphe qui le suit dans [20], on peut supposer que c se décompose en $c = \bigoplus_{i \in I_\beta}(c_i \oplus \overline{c_i}) \bigoplus_{j \in J_\beta} b_j$ avec $c_i \in \mathfrak{a}_{-r}(\Lambda_i)$ pour $i \in I_\beta$ et $c_j \in \mathfrak{a}_{-r}(\Lambda_j)_-$ pour $j \in J_\beta$.

Choisissons des corestrictions modérées $s_k : End_F(V_k) \longrightarrow End_{E_k}(V_k)$ pour $k \in I_\beta \sqcup J_\beta$. On définit comme dans [20, (5.3)] la $F[\beta]$-strate dérivée (autoduale) $[\Lambda, r, r-, s(c)]$ comme la somme

$$\bigoplus_{i \in I_\beta}([\Lambda_i, r, r-, s_i(c_i)] \oplus [\Lambda_{-i}, r, r-, s_i(c_{-i})]) \bigoplus_{j \in J_\beta} [\Lambda_j, r, r-, s_j(c_j)].$$

L'élément $s(c)$ est donc dans l'algèbre $A_\beta \subset A$ centralisatrice de β et vérifie $\overline{s(c)} = -s(c)$.

Lemme 8.10 *[19, Thm 4.4] Il existe une $F[\beta]$-strate autoduale* semi-simple $[\Lambda', r, r-, \alpha']$ *dans V telle que*

$$s(c) + \left(\mathfrak{a}_{-(r_-)}(\Lambda) \cap A_\beta\right) \subset \alpha' + \left(\mathfrak{a}_{-(r_-)}(\Lambda') \cap A_\beta\right).$$

Preuve : Cet énoncé est une "somme" d'énoncés analogues pour chaque $i \in I_\beta$, $j \in J_\beta$. Nous traitons seulement le cas $j \in J_\beta$, les autres cas se traitant de la même manière mais sans les complications "autoduales". D'après [19, Prop 4.2], il existe une E_j-fontion réseau autoduale dans V_j telle que $\mathfrak{a}_{-(r_-)}(\Lambda_j) \subset \mathfrak{a}_{-(r_-)}(\Lambda'_j)$ et $s_j(c_j) \in \mathfrak{a}_{-r}(\Lambda_j)_-$ soit "de réduction semisimple" (voir *loc. cit* pour le sens de cette expression). Si cette réduction est nulle, on a $s_j(c_j) \in \mathfrak{a}_{-(r_-)}(\Lambda'_j)$ et on peut prendre $\alpha'_j = 0$. Sinon, le réel r est nécessairement de la forme $n/e(\Lambda'_j)$ et on peut suivre la procédure de la preuve de [19, Thm 4.4]. □

L'outil fondamental est le lemme suivant qui n'est énoncé que pour les strates *gauches* dans [20], mais dont la preuve s'étend aux strates *autoduales* :

Lemme 8.11 *[20, Lemma 5.4] Soit* $[\Lambda', r', r'_-, \alpha']$ *une* $F[\beta]$*-strate autoduale dans* V *telle que*

$$s(c) + \left(\mathfrak{a}_{-(r_-)}(\Lambda) \cap A_\beta\right) \subset \alpha' + \left(\mathfrak{a}_{-(r'_-)}(\Lambda') \cap A_\beta\right).$$

Alors il existe $\widetilde{\theta}' \in \mathcal{C}(\Lambda', r'-, \beta)$ *et* $c' \in \mathfrak{a}_{-r'}(\Lambda')$ *de corestriction* $s(c') = \alpha'$ *tels que la représentation* V *contienne le caractère* $\vartheta' := \theta'\psi_{c'|H^{r'}(\Lambda',\beta)^\sigma}$. *Si de plus* $\alpha' = 0$*, alors on peut choisir* $c' = 0$.

Preuve : Nous nous contenterons de remarquer que les arguments de type “théorie des représentations” de la preuve de Stevens (lemme 5.9 de [20]) concernent des représentations de pro-p-groupes et restent valables dans notre situation où $\mathbb{C}$ est remplacé par un corps algébriquement clos de caractéristique différente de p. On pourrait aussi facilement remplacer ces arguments en prouvant

$$\varepsilon_{\widetilde{\theta}\psi_c} \in RG\varepsilon_{\widetilde{\theta}'\psi'_{c'}}RG$$

de manière analogue à la preuve de la proposition 5.3. □

Appliquons ce lemme à la strate $[\Lambda', r, r-, \alpha']$ du lemme 8.10. D'après [20, Lemma 3.5], la strate $[\Lambda', n, r-, \beta + c']$ est équivalente à une strate semi-simple, disons $[\Lambda', n, r-, \beta']$ et par [20, Rk 3.14.ii)], on a $\vartheta' \in \mathcal{C}(\Lambda', r-, \beta)$.

On a donc une procédure pour baisser *strictement* le “niveau” d'un caractère semi-simple autodual intervenant dans V. Cependant, il n'est pas encore clair que cette procédure produise après plusieurs itérations un caractère semi-simple autodual de “niveau” 0 ; on peut en effet supposer les r rationnels, mais on ne contrôle pas les dénominateurs. Pour les contrôler, il faut appliquer le lemme 8.11 dans la situation où

i) $\widetilde{\theta}$ intervient dans V et $c = 0$.

ii) Λ' est une somme sur i, j de fonctions-réseaux *optimales* (au sens de Moy-Prasad, *cf* [19, (4.3)] dans le contexte présent), $r' \leqslant r$ est tel que $\mathfrak{a}_{-r'_-}(\Lambda') \supset \mathfrak{a}_{-r_-}(\Lambda)$ et $\alpha' = 0$.

Le lemme 8.11 nous dit alors que V contient un caractère de $\mathcal{C}(\Lambda', r'-, \beta)$, mais cette fois Λ' est somme de strates optimales et sa période est bornée par un entier dépendant seulement de $dim_F(V)$. Ainsi les $r \in \mathbb{Q}$ qui sont des sauts pour de telles strates ont leur dénominateurs bornés, et la procédure de raffinement ci-dessus produit bien un caractère dans un certain $\mathcal{C}(\Lambda, 0, \beta)$ intervenant dans V.

9 Groupes modérés

Dans cette section, le corps de base redevient K et le groupe réductif connexe $\mathcal{G}$ est supposé modérément ramifié. Nous allons appliquer les résultats généraux de la partie 5 aux caractères génériques introduits par Yu dans [25].

9.1 *Groupes de Yu :* Suivant [25, sec. 2], un sous-groupe fermé $\mathcal{G}^0$ de $\mathcal{G}$ est appelé *sous-groupe de Levi tordu modéré* si après extension des scalaires de K à une extension modérément ramifiée, il devient un sous-groupe de Levi. On sait alors –toujours de manière non-canonique, mais peu importe– identifier $B(\mathcal{G}^0, K)$ à un sous-ensemble de $B(\mathcal{G}, K)$, et ce de telle sorte que pour un point $x \in B(\mathcal{G}^0, K)$, on ait $G^0_x = G^0 \cap G_x$ et $G^{0+}_x = G^0 \cap G^+_x$.

Étant donnée une suite de Levi tordus modérément ramifiés $\vec{\mathcal{G}} := \{\mathcal{G}^0 \subset \mathcal{G}^1 \subset \cdots \subset \mathcal{G}^d := \mathcal{G}\}$, et une suite $\vec{r} = \{0 \leqslant r_0 \leqslant \cdots \leqslant r_d\}$, Yu définit dans [25, sec 2] un groupe $\vec{G}_{x,\vec{r}}$ qu'il réalise dans dans [26, sec 10] comme groupe des points entiers d'un modèle lisse $\vec{\mathcal{G}}_{x,\vec{r}}$ de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{O}_K$.

D'après [26, Prop. 10.4], la fibre spéciale de $\vec{\mathcal{G}}_{x,\vec{r}}$ est unipotente si $r_0 > 0$. Dans le cas contraire $r_0 = 0$, il y a une immersion fermée $\mathcal{G}^0_x \hookrightarrow \vec{\mathcal{G}}_{x,\vec{r}}$ qui induit sur les fibres spéciales un isomorphisme des quotients réductifs. Comme dans la preuve de la proposition 7.3, on en déduit qu'un sous-groupe de Levi $\mathcal{M}$ de $\mathcal{G}$ est $\vec{\mathcal{G}}^\circ_{x,\vec{r}}$-admissible si et seulement si i) $x \in B(\mathcal{M}, K)$, ii) $\mathcal{M}$ contient le centre connexe $\mathcal{Z}(\mathcal{G}^0)^\circ$ éventuellement conjugué par un élément de $G_{x,\vec{r}}$. On en déduit aussi que $\vec{\mathcal{G}}^\dagger_{x,\vec{r}}(\mathcal{O}_K) = G^+_{x,\vec{r}} := G_{x,\vec{r}} \cap G^+_x$.

9.2 *Caractères génériques :* Gardons les notations précédentes et donnons-nous aussi une suite $\vec{\phi} := \{\phi_0, \cdots, \phi_d\}$ où chaque ϕ_i est un caractère de $G^i := \mathcal{G}^i(F)$ qu'on supposera G^{i+1}-générique (pour $i < d$), au sens de [25, sec. 5]. On suppose que la suite $\vec{r}$ des niveaux r_i des ϕ_i vérifie $0 < r_0 < \cdots < r_{d-1} \leqslant r_d$, on pose $s_i := r_i/2$ et on note $\vec{s} := (0, s_0, \cdots, s_{d-1})$ et $\vec{s}+ := (0+, s_0+, \cdots, s_{d-1}+)$.

Selon [25, Prop 4.1], la donnée de $\vec{\phi}$ définit un caractère $\theta = \prod_i \hat{\phi}_i$ de $\vec{G}_{x,\vec{s}+}$, normalisé par $\vec{G}_{x,\vec{s}}$, et tel que

i) $\mathrm{Int}_{G_x}(\theta) = \vec{G}_{x,\vec{s}}$, *cf* [25, Prop 4.1]

ii) la forme bilinéaire $(x, y) \mapsto \theta([x, y])$ sur $\vec{G}^+_{x,\vec{s}}/\vec{G}_{x,\vec{s}+}$ est non-dégénérée; c'est la somme de $i = 0$ à $d-1$ des assertions de non-dégénérescence de [25, 11.1] appliquées à $(G^i, G^{i+1})_{r_i,s_i}$ et $\hat{\phi}_i$.

Soit alors $\mathcal{M}$ un sous-groupe de Levi $\vec{\mathcal{G}}^\circ_{x,\vec{r}}$-admissible contenant $\mathcal{Z}(\mathcal{G}^0)^\circ$, et $(\mathcal{P}, \overline{\mathcal{P}})$ une paire de paraboliques opposés de Levi commun $\mathcal{M}$. Il résulte immédiatement des définitions qu'on a une décomposition d'Iwahori $\vec{G}_{x,\vec{s}+} = \vec{U}_{x,\vec{s}+}\vec{M}_{x,\vec{s}+}\vec{\overline{U}}_{x,\vec{s}+}$ pour laquelle les restrictions $\theta_{|\vec{U}_{x,\vec{s}+}}$ et $\theta_{|\vec{\overline{U}}_{x,\vec{s}+}}$ sont triviales. De plus, le groupe $\vec{M}_{x,\vec{s}+}$ est le groupe de Yu associé à la suite de Levis modérés $\vec{\mathcal{M}} := \{\mathcal{M} \cap \mathcal{G}^0 \subset \cdots \subset \mathcal{M} \cap \mathcal{G}^d = \mathcal{M}\}$ de $\mathcal{M}$ et à la suite de "réels" $\vec{s}+$, et la restriction $\theta_M := \theta_{|\vec{M}_{x,\vec{s}+}}$ est le caractère associé à la suite de caractères génériques $\vec{\phi}_{|\vec{\mathcal{M}}}$.

On a donc rassemblé tous les ingrédients pour prouver de la même manière que pour les groupes linéaires et classiques la proposition suivante qui est un analogue de 7.3 et 8.3 :

Proposition 9.3 *Gardons les notations ci-dessus, posons $R = \mathbb{Z}_{p-cycl}[\frac{1}{p}]$, et notons ε_{θ_M} l'idempotent de $R\vec{M}_{x,\vec{s}}$ associé à θ_M. Alors*

$$e_{U_x^+} e_{\overline{U}_x} \varepsilon_{\theta_M} \in RG_x e_{U_x} e_{\overline{U}_x} \varepsilon_{\theta_M}.$$

Preuve : Par ce qui précède et par 5.3, ε_{θ_M} est un idempotent essentiellement de niveau zéro pour le modèle lisse $\vec{\mathcal{M}}^\circ_{x,\vec{s}}$ de $\mathcal{M}$. Par ce qui précède encore, on peut appliquer 5.6 avec $\mathcal{G}' = \vec{\mathcal{G}}^\circ_{x,\vec{s}}$ et $\mathcal{G} = \mathcal{G}^\circ_x$, et $\varepsilon' = \varepsilon_{\theta_M}$ et $\tilde{\varepsilon}' = \varepsilon_\theta$. On omet les détails en renvoyant aux preuves de 7.3 et 8.3. $\square$

Remarquons maintenant que $\mathcal{G}^0$ contient le centre connexe de $\mathcal{M}$ et par conséquent, l'intersection $B(\mathcal{G}^0, K) \cap B(\mathcal{M}, K)$ est stable par translations sous a_M. Appliquant la proposition précédente aux points de $x + a_M$, on en déduit que l'idempotent ε_{θ_M} de $R\vec{M}_{x,\vec{r}}$ est P-bon au sens de 3.6. Il est fort probable qu'en utilisant des résultats annoncés récemment par Ju-Lee Kim et Yu sur l'exhaustivité de la construction de Yu pour les groupes modérés (ceux dont tous les tores sont modérément ramifiés), on puisse prouver que la famille des idempotents du type ε_{θ_M} comme ci-dessus est génératrice dans $Mod_R(M)$. Il faut pour cela attendre de lire les détails de leur preuve.

A Décomposition "par le niveau" de $Mod_R(G)$

Le but de cette section est d'étendre à la catégorie $Mod_R(G)$ la décomposition "par le niveau", implicite dans les travaux de Moy et Prasad lorsque $R = \mathbb{C}$ et explicitée dans le cas où R est un corps par Vignéras dans [24, II.5].

Les arguments reposent *in fine* sur les constructions de Moy et Prasad dans [18], et notamment sur la comparaison entre deux familles de filtrations concernant le groupe et l'algèbre de Lie. Pour cette comparaison, des hypothèses sont nécessaires, *cf* le commentaire qui suit [26, Cor 5.6.]. Ces hypothèses, peu contraignantes, sont vérifiées dans tous les cas considérés dans le présent article, et quoiqu'il en soit, Yu explique dans [26, 5-6] comment modifier la construction originale de Moy-Prasad dans le cas général.

A.1 *Décomposition de catégories abéliennes :* Nous rappelons ici un peu d'*abstract nonsense*. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne (avec limites inductives exactes). Pour une famille $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'objets de $\mathcal{C}$ on considère les propriétés suivantes :

– (PROJ) Chaque Q_n est projectif et de type fini ("compact").
– (DISJ) Si $n \neq m$, alors $\mathit{Hom}_{\mathcal{C}}(Q_n, Q_m) = 0$.
– (GEN) Pour tout objet V de $\mathcal{C}$, on a $\mathit{Hom}_{\mathcal{C}}(\bigoplus_n Q_n, V) \neq 0$.

Par ailleurs, pour tout objet V de $\mathcal{C}$, posons

$$V_n := \sum_{\phi \in \mathit{Hom}_G(Q_n, V)} \mathit{im}\ \phi \subseteq V,$$

un sous-objet de V. Les propriétés (PROJ) et (GEN) impliquent que $V = \sum_n V_n$. La propriété (DISJ), toujours avec (PROJ), assure que la somme est directe, *i.e.* $V = \bigoplus_n V_n$. On peut paraphraser cela en introduisant la sous-catégorie pleine $\mathcal{C}_n$ de $\mathcal{C}$ formée des objets vérifiant $\mathit{Hom}_{\mathcal{C}}(Q_m, V) = 0$ pour tout $m \neq n$. On obtient en effet une décomposition de $\mathcal{C}$ en une somme directe de sous-catégories "facteurs directs" $\mathcal{C} \simeq \bigoplus_n \mathcal{C}_n$.

Plus généralement, pour $I \subset \mathbb{N}$, notons $\mathcal{C}_I$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$ formée des objets vérifiant $\mathit{Hom}_{\mathcal{C}}(Q_m, V) = 0$ pour $m \notin I$. Alors $\mathcal{C}_I$ est une sous-catégorie "facteur direct" de $\mathcal{C}$.

A.2 *Types non raffinés de Moy-Prasad et décomposition de* $\mathit{Mod}_{\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]}(G)$: Soit $x \in B(\mathcal{G}, K)$. Moy et Prasad ont défini ([17], [18] et [24, II.5]), une certaine filtration décroissante de G_x par des pro-p-sous-groupes ouverts $G_{x,r}, r \in \mathbb{R}_+$. Les sauts de cette filtration sont discrets et on a des relations de commutateurs $(G_{x,r}, G_{x,s}) \subset G_{x,r+s}$. Si l'on convient de noter $G_{x,r^+} := \bigcup_{s>r} G_{x,s}$, alors $G_{x,0^+} = G_x^+$, et pour tout $r > 0$, le groupe fini $G_{x,r}/G_{x,r^+}$ est naturellement un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel. Ils ont ensuite défini certains caractères complexes des gradués $G_{x,r}/G_{x,r^+}$ appelés *types non raffinés minimaux de niveau* r, dont nous noterons l'ensemble $NR_{x,r}$. Ces caractères sont donc à valeurs dans l'extension $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}, \zeta_p]$ si ζ_p est une racine p-ième de l'unité. Enfin, Moy et Prasad ont défini un ensemble PO de "points optimaux" dans l'immeuble, fini modulo action de G, et nous noterons $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une énumération des sauts des filtrations associées aux points de PO.

Posons maintenant $Q_0 := \bigoplus_x \mathit{ind}_{G_{x,0^+}}^G(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}])$ où x décrit un ensemble (fini) de représentants des G-orbites de sommets de $\mathcal{I}$. Pour $r \in \mathbb{R}_+$, posons (comme dans la remarque de [24, p. 136])

$$P(r) := \bigoplus_{x \in PO, \chi \in NR_{x,r}} \mathit{ind}_{G_{x,r}}^G(\chi)$$

que l'on voit comme une représentation de type fini à coefficients dans $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$.

Lemme A.3 *La famille $Q_n := P(r_n)$, $n \in \mathbb{N}$ d'objets de $\mathit{Mod}_{\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]}(G)$ vérifie les propriétés (PROJ), (GEN) et (DISJ).*

Preuve : D'après [24, II.5], pour tout corps algébriquement clos R de caractéristique $\neq p$, la famille de représentations $(Q_n \otimes_{\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]} R)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathit{Mod}_R(G)$ vérifie les propriétés (PROJ), (DISJ) [24, II.5.8] et (GEN) [24, II.5.3] de la section précédente. Nous allons montrer que cela implique formellement qu'il en est de même de la famille $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathit{Mod}_{\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]}(G)$.

(PROJ) : En tant que somme d'induites de $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$-représentations de type fini de pro-p-sous-groupes ouverts, $P(r)$ est projective et de type fini dans $\mathit{Mod}_{\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]}(G)$.

(DISJ) : puisque Q_m est sans torsion, $\mathit{Hom}_G(Q_n, Q_m) \hookrightarrow \mathit{Hom}_G(Q_n \otimes \mathbb{C}, Q_m \otimes \mathbb{C})$. Ce dernier est nul par [24, II.5.8] appliqué à $R = \mathbb{C}$.

(GEN) : soit V un objet de $\mathit{Mod}_{\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]}(G)$ tel qu'il existe $l \neq p$ premier tel que $V_l := \{v \in V, lv = 0\} \neq 0$. On peut voir V_l comme une $\mathbb{F}_l$-représentation de G. On sait alors par [24, II.5.3] qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et un morphisme non nul $\phi : Q_n \longrightarrow V_l \otimes \overline{\mathbb{F}}_l$. Par engendrement fini de Q_n, ce morphisme se factorise par $V_l \otimes \mathbb{F}_{l^k}$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$. D'où un morphisme non nul $Q_n \longrightarrow (V_l)^k$ et par suite l'existence d'un morphisme non nul $Q_n \longrightarrow V_l$ que l'on peut composer avec l'injection $V_l \hookrightarrow V$.

Si maintenant $V_l = 0$ pour tout $l \neq p$, c'est à dire si V n'a pas de torsion, V se plonge dans $V \otimes \mathbb{Q}$. Comme précédemment on déduit de [24, II.5.3] l'existence d'un morphisme non nul

$Q_n \longrightarrow V \otimes \mathbb{Q}$. Par engendrement fini de Q_n, on peut multiplier par un "dénominateur commun" pour obtenir un morphisme à image dans V.

$\square$

Bien-sûr on obtient des décompositions similaires en étendant les scalaires à toute $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$-algèbre R. On obtient aussi la décomposition annoncée dans la preuve de 6.3. Enfin, on déduit de cette décomposition que si une représentation est engendrée par ses invariants sous un sous-groupe ouvert compact, alors tous ses sous-objets ont la même propriété. Ceci justifie le corollaire 4.5.

Références

[1] J. Bernstein. Second adjointness for representations of p-adic groups. *http ://www.math.uchicago.edu/ arinkin/langlands/*, 1993 ?

[2] J.-N. Bernstein, P. Deligne, D. Kazhdan, and M.F. Vignéras. *Représentations des groupes réductifs sur un corps local.* Travaux en cours. Hermann, Paris, 1984.

[3] R. Bezrukavnikov. Homological properties of representations of p-adic groups related to the geometry of the group at infinity. *http ://fr.arxiv.org/abs/math.RT/0406223*, 1999.

[4] S. Bosch, W. Lütkebohmert, and M. Raynaud. *Neron Models.* Number 21 in Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Springer-Verlag, 1990.

[5] Bourbaki. *Algèbre Commutative VII.* Hermann, Paris, 1961.

[6] P. Broussous and B. Lemaire. Building of $GL_m(D)$ and centralizers. *Tranform. Groups*, 7(1) :15–50, 2002.

[7] P. Broussous and S. Stevens. Buildings of classical groups and centralizers of Lie algebra elements. *Preprint.*

[8] F. Bruhat and J. Tits. *Groupes réductifs sur un corps local I. Données radicielles valuées.*, volume 41 of *Publ. Math. I.H.E.S.* Le Bois Marie – Bures-sur-Yvette, 1972.

[9] F. Bruhat and J. Tits. *Groupes réductifs sur un corps local II. Existence d'une donnée radicielle valuée.*, volume 60 of *Publ. Math. I.H.E.S.* Le Bois Marie – Bures-sur-Yvette, 1984.

[10] C.J. Bushnell. Representations of reductive p-adic groups : localization of Hecke algebras and applications. *J. London Math. Soc. (2)*, 63(2) :364–386, 2001.

[11] C.J. Bushnell and P.C. Kutzko. *The Admissible Dual of $GL(n)$ via open compact groups.* Number 129 in Annals of maths. Studies. Princeton university press, 1993.

[12] C.J. Bushnell and P.C. Kutzko. Semisimple types in GL_n. *Compositio Math.*, (119) :53–97, 1999.

[13] J.-F. Dat. ν-tempered representations of p-adic groups. I. l-adic case. *Duke Math. J.*, 126(3) :397–469, 2005.

[14] M. Demazure and A. Grothendieck, editors. *Séminaire de Géométrie algébrique du Bois-Marie. Schémas en groupes.*, number 151, 152, 153 in Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, 1970.

[15] B. Edixhoven. Néron models and tame ramification. *Compositio Math.*, (81) :291–306, 1992.

[16] R.B. Howlett and G.I. Lehrer. On Harish-Chandra induction for modules of Levi subgroups. *J. of Algebra*, 165 :172–183, 1994.

[17] A. Moy and G. Prasad. Unrefined minimal K-types. *Invent. Math.*, 116 :393–408, 1994.

[18] A. Moy and G. Prasad. Jacquet functors and unrefined minimal K-types. *Comment. Math. Helv.*, 71(1) :98–121, 1996.

[19] S. Stevens. Intertwining and supercuspidal types for p-adic classical groups. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 83(1) :120–140, 2001.

[20] S. Stevens. Semisimple characters for p-adic classical groups. *Duke Math. J.*, 127(1) :123–173, 2005.

[21] J. Tits. Reductive groups over local fields. *Proc. Symp. Pure Math.*, 33 :29–69, 1979.

[22] M.-F. Vignéras. Cohomology of sheaves on the building and R-representations. *Invent. Math.*, 127 :349–373, 1997.

[23] M.-F. Vignéras. Appendice à *types et induction pour les représentations modulaires de groupes p-adiques*, par J.-F. Dat. *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 32 :1–38, 1999.

[24] M.F. Vignéras. *Représentations l-modulaires d'un groupe p-adique avec l différent de p*. Number 137 in Progress in Math. Birkhuser, 1996.

[25] J.-K. Yu. Construction of tame supercuspidal representations. *J. Amer. Math. Soc.*, 14(3) :579–622 (electronic), 2001.

[26] J.-K. Yu. Smooth models associated to concave functions in Bruhat-Tits theory. *Preprint,http ://www.math.purdue.edu/ jyu/prep/model.pdf*, 2002.